数論幾何学

——リーマン予想からエタール・コホモロジーへ

きょうは数論と幾何という題で話します。3 年生の科目でいうと数論は代数なので、多様体やホモロジーをあつかう幾何とは関係ないような気がするかもしれませんが、その 2 つが一体となるのが数学のおもしろいところです。現代数学は抽象的な基礎のうえに創られていますが、そうした傾向は 19 世紀のリーマンのころからはっきりしてきました。ここでも、数論と幾何についてそれぞれ、リーマンから話をはじめます。

1. リーマン予想

まず、リーマンのゼータ関数の定義からはじめます。リーマンのゼータ関数はディリクレ級数として定義されます

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

これは s の実部が >1 の範囲で絶対収束し，**正則関数**を定めます．素因数分解の一意性を使うとこれをオイラー積で表すこともできます

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は複素平面全体に有理形関数として**解析接続**され，$s=1$ で 1 位の**極**をもつ以外は正則です．**零点**については，実部が >1 の範囲ではオイラー積が収束することから，零点がないことがわかります．このことと関数等式を使うと，実部が <0 の範囲では零点は負の偶数での 1 位の零点しかないこともわかります．

自然数 n 以下の素数の個数 $\pi(n)$ がおよそ $\dfrac{n}{\log n}$ であるという素数定理は，実部が 1 の零点がないことを示すことで証明されました．実部が 0 と 1 の間の零点はすべての実部が $\dfrac{1}{2}$ であるというが有名なリーマン予想で，未解決の問題です．これが証明されれば，素数の分布についてもっと精密なことがわかることになります．

2. 代数体と関数体の類似

古典的な代数的整数論は，代数体とよばれる有理数**体**の**有限次拡大**の理論です．有限体上の 1 変数有理関数体の有限次拡大は，有限体上の 1 変数関数体とよばれますが，このような体と代数体はとてもよく似ています．これを代数体と関数体の類似といいます．数学ではこのようによく似たものをみつけてその類似を調べることで，両方のものがもっとわかるようになることがよくあります．

リーマンのゼータ関数 (1) は有理数体のゼータ関数と考えることができます．こう考えると有限体上の 1 変数関数体のゼータ関数も定義することができます．これについてはリーマン予想の類似が証明されています．

まず，有理関数体の場合からはじめます．p を素数とし，$\mathbf{F}_p$ を位数が p の有限体とします．1 変数の多項式環 $A = \mathbf{F}_p[T]$ には，**単項イデアル整域**であるだけでなく，**極大イデアル** $\mathfrak{m}$ による剰余体 $A/\mathfrak{m}$ がすべて有限体であるという整数環 $\mathbf{Z}$ とよく似た性質があります．このことを使うと $A = \mathbf{F}_p[T]$ のゼータ関数を (2) と同様にオイラー積として定義できます

$$\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{m}:\ A\text{ の極大イデアル}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{m}^s}\right)^{-1}. \tag{3}$$

ここで $N\mathfrak{m}$ は有限体 $A/\mathfrak{m}$ の元の個数を表す記号です．

A として整数環 $\mathbf{Z}$ を考えて (3) にあてはめると，リーマンのゼータ関数をオイラー積で表す式 (2) になります．$A = \mathbf{F}_p[T]$ に話をもどすと，多項式環でも**素元分解**の一意性がなりたつので，(1) のように A のゼータ関数 $\zeta_A(s)$ をディリクレ級数で表すこともできます．

$A = \mathbf{F}_p[T]$ のゼータ関数 $\zeta_A(s)$ とリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ の大きな違いは，$\zeta_A(s)$ は $\dfrac{1}{1-p^{1-s}}$ という簡単な関数であるということです．このことから $\zeta_A(s)$ は $s = 1 + \dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log p}\cdot n$ （n は整数）で 1 位の極をもつこともわかります．

問題 1 $A = \mathbf{F}_p[T]$ に対し，$\zeta_A(s) = \dfrac{1}{1-p^{1-s}}$ を示せ．

ここまで A は多項式環 $\mathbf{F}_p[T]$ としていましたが，A が整数環 $\mathbf{Z}$ 上**有限生成**

ならどんな可換環でも，(3) でそのゼータ関数を定義することができます．ここでは，整数環 $\mathbf{Z}$ 上の環として有限生成な体はすべて有限体であるという，可換環の定理を使います．

多項式環 $\mathbf{F}_p[T]$ の次に調べられたのが，

$$\mathbf{F}_p[X,Y]/(Y^2 - f(X)) \tag{4}$$

のような環でした．ここで p は 3 以上の素数とし，$f(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ は重根のない 3 次式とします．このときのゼータ関数 $\zeta_A(s)$ を調べるのは，問題 1 よりはだいぶ難しくなりますがそれでもリーマンのゼータ関数とはくらべものにならないほど簡単で，

$$\zeta_A(s) = \frac{1 - ap^{-s} + p^{1-2s}}{1 - p^{1-s}} \tag{5}$$

のようになることがわかっています．それだけでなく，a は整数で，$|a| < 2\sqrt{p}$ をみたすことまでわかっています．

この不等式は，分子の $1 - ap^{-s} + p^{1-2s}$ が $(1 - \alpha p^{-s})(1 - \bar{\alpha} p^{-s})$ のように分解し，複素数 α の絶対値が $p^{\frac{1}{2}}$ ということと同値です．したがって $\zeta_A(s)$ の零点の実部は $\dfrac{1}{2}$ で，$\zeta_A(s)$ についてはリーマン予想の類似がなりたつことになります．

リーマン予想の類似についてはもっといろんなことがわかっているのですが、その話にはあとでもどってくることにして，分子の式がなぜ p^{-s} の 2 次式なのか考えることにしましょう．ここで数論と幾何がつながってくるのです．

この続きは

数学の現在（東京大学出版会）

でお読みください．