

ブルバキと「数学原論」

斎藤 毅

1. ブルバキって誰.

これから数学の勉強をはじめようかと思っている人が、ブルバキにであう機会なんてものは今あるのでしょうか？ブルバキが証明した有名な定理があるわけではないし、本屋さんにおいてもブルバキが書いた本がならんでいるわけでもありません。もしそんな機会があるとすれば、大学の図書館か神田の古本屋で、「数学原論」という題の本がずらっとならんでいることに、たまたま気がつくことがあるかもしれないくらいでしょう。実はこれがブルバキが書いたただ1つの本であり、20世紀の数学に大きな影響を与えたといわれるものなのです。

せっかくみつけたついでに背表紙をながめてみましょう。「集合論」(3冊+要約1冊)、「代数」(7冊)、「位相」(5冊+要約1冊)、「実一変数関数」(2冊)、「位相線型空間」(2冊+要約1冊)、「積分」(5冊)、「リー群とリー環」(3冊)、「可換代数」(4冊)、「スペクトル論」(1冊)、「多様体」(要約2冊)、とかなりの分量ですね。集合、代数、位相、... といえば、大学の数学科の講義のふつうの内容ですが、こんなに長々と何が書いてあるのか、ちょっと気になりませんか？それではブルバキの世界へのご案内しましょう。^{*}

2. ブルバキの誕生.

ブルバキは1934年A. ヴェイユとH. カルタンの中に生まれ、1939年に「数学原論」の最初の巻「集合論 要約」を出版。以後1950年代末までに「数学原論」のうち「集合論」、「代数」、「位相」、「実一変数関数」、「位相線型空間」、「積分」からなる第1部を完結。その後もペースは落ちたものの、ひきつづき第2部の「リー群とリー環」、「可換代数」、「スペクトル論」、「多様体」と、第1部の改訂版の出版をつづける。この他、毎年3回ブルバキ・セミナー[†]を主催、というのがブルバキの略歴です。

何か変だと思った注意深い人に種明かしをしてしまうと、ブルバキというのは個人名ではありません。「数学原論」を書くために1930年代にフランスで結成された、数学者集団のペンネームです。ブルバキの正体は、かなり長い間秘密とされていましたが、今では、その秘密はほとんど明かされています。ブルバキのホームページ <http://www.bourbaki.ens.fr/> によると、その創立メンバーは、H. カルタン、C. シュヴァレー、J. デルサルト、J. デュドネ、A. ヴェイユ、... といった、当時30才前後、ばりばりの若手だった9人の数学者です。ブルバキは50歳定年制を敷き、次々とメンバーを入れかえながら、現在に至っています。メンバーの1人だったP. カルティエのインタビュー(沈黙を続けるブルバキ, Mathematical Intelligencer 20 (1998年))によると、ブルバキ

^{*}ブルバキについては、「数学のたのしみ」18号に高橋礼司氏と岡本和夫氏の対談、28号に栗原将人氏の随想もあります。

[†]ブルバキ・セミナーについては、ページ数の都合で残念ながらふれられませんでした

のメンバーは大きく4つの世代にわけることができ、創立メンバーからなる第1世代のあと、第2世代 S. アイレンバーグ, J. ディクスミエ, R. ゴドマン, J.-L. コシュール, P. サミュエル, L. シュヴァルツ, J.-P. セール, ... 第3世代 A. ボレル, F. プリュア, P. カルティエ, A. グロタンディック, S. ラング, J. テイト, ... と、そうそうたる名前が並びます。

ブルバキ誕生のいきさつは「A. ヴェイユ自伝」(稲葉 延子訳, シュプリングァー・フェアラーク東京) などによると、次のようです。1930年代, ストラスブール大で微積分を教えていたヴェイユとカルタンは、その教え方について議論を重ねていました。何度となく繰り返される議論にケリをつけるため、彼らは、微積分をきちんと基礎付けた教科書を、仲間を集めて書くことにしました。そのころの数学書には、厳密さがそれ以前よりずっときびしく求められるようになってきていたのですが、当時のフランスの微積分の教科書には、この要請をみたしているものがなかったのです。

彼らの計画は、微積分の基礎付けという最初の目的から、数学全体の基礎付けへとすぐに大きくふくらんでいきました。彼らの本の題は、ユークリッドの「原論」にちなんで、「数学原論」に決まりました。ユークリッドの「原論」は、内容はギリシャ数学全般にわたり、記述は正確で厳密なことで知られます。彼らは、現代の数学の「原論」を書くことにしたのです。ユークリッドの「原論」のように長く読みつがれる本を書くぞ、という意気込みもあったことでしょう。

3. 「数学原論」.

では「数学原論」のページを開いてみることにしましょう。まず本文をみてみると、そこにあるのは、定義、定理、命題とその証明の羅列です。いくらページをめくっても、それが延々と続き、目を休ませてくれるような図や表といったものもほとんどありません。何故そういう定義をおくのかとか、どうしてこの定理は大事なのかとか、この命題はどんな使い道があるのかといった説明もありません。数学の厳密で正確な記述だけが、淡々と続きます。

次に目次をみてみましょう。

「集合論」1. 形式的な数学の記述. 2. 集合論. 3. 順序集合 基数 自然数. 4. 構造.

「代数」1. 代数構造. 2. 線型代数. 3. テンソル代数, 外積代数, 対称代数. 4. 多項式と有理式. 5. 可換体. 6. 順序群と順序体. 7. 主環上の加群. 8. 半単純加群と半単純環. 9. 準双線型形式と二次形式.

「位相」1. 位相構造. 2. 一様構造. 3. 位相群. 4. 実数. 5. 一径数群. ...

きりがないのでこの辺でやめましょう。はじめは微積分の教科書を書こうとしていたはずなのに、実数が登場するのは、「位相」の第4章、「集合論」から数えて12冊目の後半です。微分の定義は「実一変数関数」ですから、なんと16冊目です。

ではなぜ彼らはこういう文体、構成をとったのでしょうか。それは、彼らが目標とした、正確さ、厳密さを確保するための方法によるものなのです。それがどういうものであるかは、各分冊の最初のページにある、「この本の使い方」に書かれています。いくつか抜粋します。

「この原論は数学をその第一歩から取扱い、完全な証明をつける」

「叙述の仕方は公理的、抽象的であり、原則として、一般から特殊へと進む」

「内容は原則として厳密に定められた論理的順序に従って配列される」

「すでに広い知識を持合わせている読者にしかその効用がわからないような事柄も含まれている」

完全な証明をつけるのですから、図などを使って読者の直観に訴えるのは反則なのです。

定義の動機づけや、定理や命題のもつ意味の説明がないのも、それを厳密に述べようとすれば、結局は理論を展開するほかないからでしょうか。とはいっても、こんなふうに突き放されてしまうと、初心者にはつらいものがありますね。

彼らが「数学原論」の記述に採用したのは、公理的方法とよばれるものです。例えば、数直線、リー群、代数多様体、関数空間、 p 進体など、さまざまな数学的対象がある共通の位相的性質をもつことを証明したいとしましょう。そのときこの方法では、1つ1つの対象に対して同じような証明をくりかえすなどということはしません。そうではなく、まずこれらの対象が共通にもつ性質を抽出し、それを少数の命題からなる位相空間の公理としてまとめます。そして、この公理から問題となっている性質を導きだすことによって、いっぺんに証明をすましてしまうのです。公理的方法は抽象的なものですが、数学のさまざまな分野を結びつける力をもった強力なものです。「数学原論」では、この方法が極端なまでに組織的に、そして厳格に貫かれています。1つ1つの定義、命題が徹底的な検討を経て定式化され、そしてそれらが、論理的順序に従い、整然と秩序だてて並べられています。「集合論」、「代数」、「位相」、... という構成も、そうして定まったものなのです。彼らは自分たちの原則に忠実にしたがって、考え抜かれた緻密な構成と、明晰で厳密な論証をもつ数学書を、次々と作り出していったのです。

「数学原論」の数学的内容について、もう少しだけ立ち入ってみたいと思います。というと、「構造」についてふれるのがほとんど定番のようになっていきます。しかしここでは、ブルバキが線型代数を重視したことに注目したいと思います。このことは、彼らがモデルとしたに違いない、ファン-デル-ヴェルデン「現代代数学」と比べてみるとよくわかります。「数学原論」では、線型代数と多重線型代数はそれぞれ、「代数」の巻の第2章、第3章の主題です。一方「現代代数学」では、線型代数は最後の巻である第3巻の後半、第15章になってようやく現れ、多重線型代数はでてきません。ブルバキは、数学全体の基礎を集合論に求めましたが、代数の基礎は線型代数においたのです。こうすることにより、「現代代数学」ではばらばらに扱われていた、イデアル、線型空間、拡大体、アーベル群、線型表現などが体系的に扱われることになりました。例えばガロワ理論は、拡大体のテンソル積の構造から見通しよく導き出されますし、行列式も、外積代数を使って鮮やかに定義されます。ブルバキはこのように、線型代数は数学を支える大きな柱であることを主張しました。線型代数は、当時勢いよく発展しつつあったホモロジー代数とともに、その占めるべき本来の位置を数学の中にとりもどしたのです。

40年代、50年代に「数学原論」の各巻が次々と出版されると、それは数学界に大きな反響をまきおこしました。反発を感じる数学者も多かったようですが、それ以上に、積極的に幅広く受け入れられていったのです。数学全体を公理的集合論の上に厳密に基礎付ける、というヒルベルト以来の夢を現実にしたことも、その一因でしょう。しかし本当の理由は、そういうメタ数学的なものではないと思います。

数学はその頃、関数解析、代数幾何、複素解析幾何やトポロジー、それらを支えるホモロジー代数やカテゴリーといった抽象的な方向へ爆発的に発展していました。ブルバキの1人1人も、それぞれの専門分野で大きな貢献をしています。カルタン-アイレンバーグ「ホモロジー代数」、シュヴァレー「リー群の理論1」、シュヴァルツ「超関数論」、ゴドマン「層の理論」、ヴェイユ「代数幾何の基礎」といった本は、いずれもこの時期にブルバキのメンバーによって、「数学原論」の文体で書かれたものです。「数学原論」が、こうした発展の基礎となる理論の明解で確実な記述を与えていること、そしてそのかなりの巻が、それぞれの内容についてのまとまった最初の文献であること、こ

うしたことこそが、「数学原論」が高い評価をうけ、そして数学に大きな影響を与えていった本当の原因だと思います。

4. ブルバキと現在.

このように、輝かしい成功をおさめた「数学原論」ですが、90年代になって出版されたのは「可換代数 第10章」1冊があるだけです。これから書かれる巻はもしあるとしても、ごくわずかでしょう。21世紀に生きる私たちにとって、「数学原論」はもはや過去のものなのでしょうか？

今の数学における「数学原論」の影響を推し測ることは、思ったより難しいことかもしれません。というのは、それは空気や水のようにいたるところに行きわたり、今の数学の土台をなしているからなのです。その影響の1つはたとえば、大学の数学科での講義内容に現れています。私の所属する数学科の必修科目は、2年後期では、線型代数の続き、集合と位相、関数論です。3年前期では、代数系、多様体、ルベーグ積分、関数論の続きとなります。集合、位相、代数系、線型代数といえばちょうど、「数学原論」のはじめの3部門「集合論」、「代数」、「位相」の内容の基礎的な部分です。

「数学原論」の影響は、もっと下の学年にもおよんでいます。今ほとんどの大学の理工系の学部で、1年生は線型代数を学びます。これは、ブルバキが線型代数の重要性を強調したことの帰結です。高校の数学でも、指導要領に復活することになった行列と1次変換について、同じことがいえます。こうしてみると、今、数学を学ぶということの中で、ブルバキ的な数学を身につけることが大きな部分を占めていることがわかります。当時は最新のものだったはずの「数学原論」の目次の各項目が、今はあたりまえのように見えることこそ、その影響の大きさの何よりの証なのです。

別の影響は、数学の記述に見られます。定義、定理、証明の羅列というブルバキの文体、そして、抽象的、公理的な構成。これらは今の数学の本、教科書、論文で、ふつうに見られるものです。「数学原論」の続きが書かれなくなったのは、他の数学者もブルバキのように書くようになったからということも一因のようです。メンバーの1人だったボレルは、「(他の著者による)新しい本の中にも、ブルバキのスタイルで書かれたものがあった... (ブルバキが同じ主題について書いたとしたら、それは) 無駄な二度手間となるだけだったろう」(ブルバキとの25年, アメリカ数学会 Notices 45 (1998年))と振り返っています。それはともかく、今もブルバキは数学に大きな影響を、意識にのぼらないところで、およぼし続けているのです。

一方、数学の中には、ブルバキの影響が今もくっきりとみてとれる分野があります。その代表的なものが数論幾何です。ブルバキの創立メンバーの1人だったヴェイユは、リーマン予想の類似として、有限体上の代数多様体の合同ゼータ関数に関するヴェイユ予想を1949年に定式化しました。この予想は、やはりブルバキのメンバーだったグロタンディックの元学生P. ドリーニュによって、1974年に証明されました。この間、この予想の解決を目標として、抽象代数幾何の基礎付け、エタール・コホモロジーの導入など、数論幾何は大きく発展しました。その中で中心的な役割を果たしたのが、同時にブルバキの中心的メンバーでもあったヴェイユ、セール、グロタンディックといった人たちだったのです。予想の解決に使われたエタール・コホモロジーは、今も数論幾何の基本的な道具ですが、ブルバキがその重要性を強調した、線型化の一例でもありました。

グロタンディックは、やはりブルバキのメンバーだったデュドネと協力して、彼が建設した抽象代数幾何の基礎理論であるスキームの理論を、「代数幾何原論(EGA)」にまとめました。この本は、文体といい、内容といい、まさに「数学原論」の続きのような

本です。逆に「数学原論」の「可換代数」の巻は、「代数幾何原論」の基礎とするために書かれたのではないかと思われるふしもあります。1994年A. ワイルスによって証明されたフェルマー予想も、数論幾何の定理の1つです。ワイルス自身は、特にブルバキ的な数学者ではありません。しかし、その証明を注意深くみると、いろいろなところにブルバキ的な数学の影響を読み取ることができます。

ブルバキが「数学原論」の新しい巻を次々と書き、数学の新しい流れを作るということはもうないでしょう。しかし、彼らが作り出したものは、今の数学の中にしっかりと根をおろし、新しい発展を支えてくれているのです。