

微積分

——イプシロン・デルタは今もむかしも難しい？

斎藤 毅

「微積分といふものは、何遍書いても、例に依て例の通りの型にはまつて書き榮えもしないくせに、多大の頁数を要するのが迷惑千萬である。」 高木貞治「解析概論について」より

東京大学出版会から数学の教科書をまた出してもらった。こゝんどは微積分である。「わたし的には、この二冊で完結したい」た（「集合と位相―計算しない数学―」『UP』二〇〇九年一月号 <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/jd/UP.pdf>）のではと、『UP』の読者の方にはつっこまれそうだ。その辺のいいわけなどを書いてみよう。

微積分と時代性

『線形代数の世界』と『集合と位相』の二冊はもう少し専門的だったから、内容の近い本というのもそれほどたくさんはなかった。しかし『微積分』となると話は違う。高木貞治著『解析概論』（岩波書店）の名前を知っているという人は多いだろう。名著と名高い本があるのに、どうして新しい教科書を書くのかと思われても無理はない。

数学以外の学問では、定説に誤りが見つかって、新しい理論で古い理論がくつがえされるということがあつたらしい。よくい

われるように、数学の定理は一度証明されれば人類の歴史が続く限り永遠の真理である。

だとすると、新しい世代は前の世代の成果を全部勉強してからでないとその先に進めないように聞こえる。それではたまたないので、そうはなっていない。

ではどうなっているのかというと、古くなったものはただ忘れ去られることよつて淘汰される。古い世代にとつてそれはさびしいことかもしれないが、そんなことに構つてはいられない。それでどんな名著にも賞味期限がくる。

近代の微積分はニュートンとライプニッツによつて創始された。彼らは一七世紀から一八世紀にかけて活躍した。なので、微積分はその頃に完成したような印象もあるが、そうではない。

関数の極限がイプシロン・デルタ論法で定義されたのは一九世紀になつてからだった。コーシーは、彼の定義に基づいて連続関数は必ず積分できることを「証明」し、教科書に書いた。

ところが、そこには当時の誰もが見落とした大穴があいてい

た。これをうめるには、実数の連続性あるいは閉区間のコンパクト性と今はよばれる性質が必要だった。人類はその理解に到達するまでかなりてまどり、すべてが明らかになったのは一九世紀も後半だった。

『解析概論』の初版は一九三八年に出版された。当時は微積分の基礎が確立されてからも長い年月が経ったと誰もが思っていたに違いない。でも二一世紀の私たちから見ると、それは微積分の基礎の完成と現在のちょうど中間点ぐらいにあたる。

物理学や生物学が二〇世紀に量子力学や分子生物学として変貌をとげたように、数学も抽象的な方向に大きく様変わりした。一九三八年といえば、数学の現代化とよばれるこの激動が本格化するよりも前になる。

古くなったものは忘れられるという話だった。新しい理論がでてくると、それは隅から隅まで徹底的に調べ上げられる。わかったことは整理されて、選ばれたものだけが生き残り、それほどでもないものは忘れられる。一生懸命調べている間には、どれが生き残るのかなど分からない。忘れられたものは消え去りはしないが、誰かがその記録を訪ねてくるのを図書室の本棚でひっそり待ちつづける。

そんなことから、名著もいつかは古びてくる。教科書は辞典ではないから、網羅的に書いてあるわけではない。これだけは

知らないといけないよということだけが書いてある。その感覚が時代とともにずれていく。

一つだけ例をあげてみよう。無限級数の和というものがある。数列を前から順にたしていった極限のことである。ものによって収束したりしなかったりするのだが、収束するものにも二通りある。順番をどんなにいかせても答が同じものと、変わってしまうものである。答が変わってしまうときには、順番のいかえ方をうまく調節すると、どんな値にでも収束させられる。

これが一九世紀に証明されたとき、当時の人たちは驚いたことだろう。『解析概論』にはその証明が書いてある。でもいつまでもそんなに詳しいことを最初から勉強しているよりは、サクッとすませてその先に目をむけてもいいのではないだろうか。

先日たまたま『解析概論』の初版本が手にはいった。奥付には昭和十三年五月五日印刷、定価七圓と書いてある。カタカナ書キナノデ慣レナイト読ミニクイガ、関数のグラフの職人仕事にはコンピューター製版とは違った細やかさがある。ちょうど微積分の本を書いている最中にそのような幸運があったのは、偶然とは思えなかった。

たかが微積分

微積分は高校生にとってはそれまでに教わった数学の頂点か

もしれないが、大学生にとっては入り口にすぎない。もっと難しい数学をそのあとで学ぶからというのではない。理系にしても文系にしても、数学をちよつとでも使おうとするなら微積分がわからなければその先には進めない。

大学では微積分と並行して物理も勉強することが多い。それでこの本では、物理で微積分がどんなところで使われるのか、大事そうなところをいくつかとりあげてみた。

学生のころを思い出してみると、熱力学はよくわからなかった。いろいろな関数の計算をする。さっきはあの変数の関数だったはずなのに、次には別の変数の関数と考えて偏微分したりするものだから、違う答がでってくる。数学者にとっての関数とふつうの人にとっての関数は、どうも意味が違うものらしい。数学者にとっても、現代的な関数の定義が一九世紀に確立するまでには実は紆余曲折があった。その痕跡が陰関数や多価関数という不条理な名前に残っている。

解析力学の講義にもでていたはずだが、ラグランジアンをハミルトニアンに変換する操作をルジャンドル変換ということなど教わった記憶はまったく抜けている。もともとなかったのか、消えてしまったのかすらわからない。

こんな具合に、ちゃんと物理に使えるような微積分はなかなか高度で、大学で一年半近く勉強してようやく使い物になる。

それで微積分という敷居でつかえてしまわないように、とりあげる内容を精一杯しぼりこんでコンパクトにまとめた。必要最小限のものを身につけたら、その先の世界へ踏み込んでいて欲しいからである。

ところで、紙の本というのはケータイをもたない人と同じく絶滅危惧種らしい。近い将来、電子書籍にとって変わられる運命にあるそうだ。読者としては紙の本に愛着がある。しかし著者としては電子ファイルの利便さは捨てがたい。とりわけ検索機能の利便さは、一度ひたるとそれなしではいられない。

話がずれるが、子どものころは明けても暮れても時刻表を読んでいた。慣れてしまえばそんなものはなくても見たい線のページが一発で開けるようになるのだが、微積分の本にもインデックス（ツメ見出し）があれば便利で邪魔にはならない。最近はそのような教科書もあるようなので、この本にもつけてもらった。

されど微積分

微積分の講義はなんどもしたから、何を書けばよいかよくわかっていてもいい。それでも、本を書いてみてはじめてわかったことは多い。書き始めた頃には、どんな本にするのかという考えがそれほどはっきりしていたわけではなかった。

この文章に書いていることも、本を書きながら気がついたことやわかったことが実はほとんどである。たとえば、三次元空間にも極座標というものがある。緯度と同じで赤道からはかるものだと思い込んでいた。北極からはかるから極座標というのだろうか。では、なぜ平面の極座標は円のてっぺんからはかるないのだろうか。

数学者の仕事は新しい定理を証明することだから、自分しかできないことでなければやる意味がないという強迫観念がある。孫悟空が世界の果てまで飛んできたと思っても実はお釈迦様の手のひらの上だった、というむかし読んだ本のさし絵が、たいしたことができてないと感じるときは頭にくる。

大きな書店にいけば、微積分の本は棚にいっぱい並んでいる。何もわざわざ自分で書かなくてもほかに書いてくれる人はいるはずだと、忙しい数学者なら誰もが思うことだろう。原稿にむかうと、そんな考えが舐斗雲に乗って頭の中を飛びまわる。

ちょうどそんなときに、『数学セミナー』という雑誌の二〇一年八月号に京都大学の梅田亨先生が書かれた「解析概論 解析教程のながれ」という記事が目にとまった。『解析概論』成立の背景」にはじまり、その内容から現在におよぶ影響までがそう長くはない文章の中に論じられている。終わりに近づくにつれ熱がこもってくるのが感じられる。私にとっては刺激的な

文が満載だった。いくつか抜き出してみよう。

『解析概論』はそれほどまでに強固な権威であり呪縛だったのである。『解析概論』は、高木の言を嘲笑うがごとくに自らを「伝統」と化した。「根本的な批判なしには日本発の本格的な教科書は出現し得ないのだ。」「教育レベルの下がった現今、高木を超えることなど不可能に思える。」

なにが著者をこう熱く語らせているのか気にかかる。『解析概論』が今も「影響力の大きさでは他を圧倒して」いることが息苦しいのだろうか。それはともかく、この文章を読んでようやく、「伝統」から逸脱しても自分としての理想の教科書を書けばよいのだと思うことができた。今から思うとまだ全体の構想が見えていたわけではなかったが、方向は定まった。孫悟空のまぼろしもいつのまにか消えていた。おかげでそれまでに書いた分はほとんど書き直すことになった。

微積分というところあれもこれもとつめ込むせいか、雑多な事実のよせ集めという印象もある。コンパクトにまとめることにしたことだし、微積分の論理的な構造を本の組み立てにとりこもうと考えた。伝統から逸脱することにしたのだから、いろいろと実験的なことをしてみようとも思った。

微分方程式はニュートンの運動方程式以来、数学の応用としては史上最強だし、理論的にも重要極まりない。なのに『解析

概論』には書いてないという「伝統」の「呪縛」のせいか、日本語の微積分の教科書で微分方程式をとりあげているものは意外に少ない。

積分は高校では微分の逆として定義する。大学では面積の考えて定義する。積分に備わったこの二面性が実は微積分の根幹にある。微分の逆としての積分を微分方程式の解としてとらえれば、これをはつきりとうちだせる。

大学の微積分といえばイプシロン・デルタ論法に悩まされたという人は多いだろう。高校までと比べると論理の比重が異様に大きくみえる。微積分には、あちこちに落とし穴が待ち構えている。クレバスだらけの氷河をロープをつけずに歩くのが無謀なように、厳密な論理なしにはどこで間違えるかわからない。数学の歴史の上でもそうわかってきたのは、微分方程式の解の存在定理が証明されたころに経験値を貯めてからだだった。

微積分とひとまとめにいうが、微分は各点ごとの局所的な問

題で、積分は定義域全体にわたっての大域的な性質グローバルという決定

的な違いがある。そのせいで、積分の理論的な基礎づけは微分に比べはるかに難しい。一九世紀の数学者を悩ませたのも、今も学生を悩まし続けるのも無理はない。

などと思いつながら解の存在定理の証明の原稿を読み直していると、大穴があいていた。微分方程式の入門書ではたいてい局所的に定式化してある。しかし、定理としては大域的なほうがわかりやすいし使いやすい。そう思って工夫したら、落とし穴にはまるところだった。気をつけて直したので大丈夫と思うが、伝統から逸脱するのも冷や汗ものである。一九三八年以来の呪縛の効きめはおそろしい。

自分の書いた原稿とひたすらにらめっこして間違いを見つけ出す作業は、心理的にもなかなかきびしい。いちどは消えた孫悟空がまたうろつきそうになる。原稿を何度も読み直したが、存在定理の大穴のようなこともあるので一〇〇%といえる自信はない。「誤算の有無は保証されない」といいきる『解析概論』の著者のような度胸はないので、もし気がつかれたら、お知らせいただけるとありがたい。

数学の本には間違いが多いと、学生に言われたことがある。数学の本では間違いかどうかはつきりわかってしまうからでは、とその場合は答えたが実際にはどうなのだろう。確かに、微積分の教科書でもときどき誤りに気がつくことがある。

数学者は不注意だといいたいのではない。逆に、線分の端つこの点が線分にはいつているかどうかなど気にするのは数学者ぐらいだろう。積分をちゃんと定義しようと思うとどうしても

その辺が気になる。「コンパクト」という数学的に重要な概念にもつながっていく。といっても微積分の本を「コンパクト」でまとめると、ついてきてくれる読者も精一杯しぼりこむことになりそうだ。そこで「コンパクト」は『集合と位相』にゆずった。と、こちらもさりげなく宣伝しておこう。

高校から大学へ

微積分の教科書を書いてみようと思った理由はいろいろあるが、講義にちよどびつたりの本が思いあたらないことがやはり大きい。微積分の講義のなかみも時代とともに変わる。

ゆとり教育はいつのまにか終わったらしい。としても、それ以前の分も含めて高校の教科書から消えてしまったものは多い。高校生のころには、微分方程式も書いてあったのに。高校の教科書が変われば、それに応じて大学の教科書も変えないわけにいかない。

今度の指導要領の改訂では、行列が消えた。線形代数の重要性が認識されたのは二〇世紀の数学の大きな特徴だった。高校の教科書に行列があったのはそれを端的に表わしている。行列なら大学で教えるからいいじゃないのという先生もいるが、高校で一度勉強していたから教えやすかったのは間違いない。

中学からおなじみの関数のグラフのおかげで、一変数の関数

は視覚的にとらえられる。大学では二変数の関数を扱う。グラフは三次元空間の中の曲面になるので、黒板の上に書くのは難しいが、それほど想像力を働かせなくても思い浮かべることができる。

もう一歩進むと、二変数関数を二つ組にしたものを考えることになる。これを視覚的にとらえるのは難しい。二変数関数は平面上の点に対して定義された関数だから、それが二つあると平面上の点に対して別の平面上の点が定まることになる。これを数学では、平面から平面への写像という。

写像のグラフというものもあるが、これは四次元空間の中の曲面になる。数学者にとっては何次元だろうが同じようなもので、目新しいことはない。しかし、それをすんなりのみこめる人は少ないだろう。行列が定める一次変換を高校で教えておいてくれれば、それと似たようなものですといえればわかりやすいはずだが、これからはそうはいかないらしい。

英語の科目では、東大の一年生が全員同じ本で勉強するための統一教科書『東京大学教養英語読本Ⅰ・Ⅱ』が東京大学出版会からでている。数学ではやらないのかという話題が数学科の会議でできることもあるが、いっこうに実現する気配はない。ひとと同じことをするのは意味がないという、例の強迫観念のせいでだろうか。

大学一年生の教科書を書くなら高校の教科書も見ておかないと、と思つたら極値の定義が違うのには驚いた。極値の定義にはイブシロン・デルタ論法に似た所があるのでわかりにくいのかと思つていたが、高校と大学で教科書に違うことが書いてあれば混乱するのも無理はない。

高校では \geq のように書く等号付きの不等号を、大学ではのように書くことが多い。これはたぶん論文の原稿をタイプライターで打つていたときの都合のせいだろうということをも最近教えて、長年の疑問が解決した。コンピューターの普及のおかげで使える漢字を制限する意味も薄れてきたことだし、本では \geq に戻した。 $>$ との違いはつきりするので、使い分けに気をつけるようになるという思わぬ効用もあった。

高校の微積分の主役といえれば三角関数や指数関数だが、大学の微積分からみればその定義は穴だらけである。どちらがよいということではない。三角関数がどんなものかを知りたければ高校での定義で十分だろう。しかし厳密な証明には使えない。

せっかくイブシロン・デルタ論法を勉強しても、それが何の役に立つのか納得するのは難しい。三角関数や指数関数を厳密に定義しなおすのは、肩ならしとしてちょうどよい。曲線の長さを積分で表わす公式も高校の教科書では発展学習に島流しになつてしまつたが、円弧の長さの定義はリーマン式の積分の定

義のよい練習台になるだろう。

この本を書いてみて、改めて微積分の奥の深さに気づかされた。こうとりとめもなく書いていても、いくらでも書くことが思いつく。本文はルート2が無理数であることから始まる。高校の教科書では素因数分解を使つて証明する。ユークリッドの互除法による別の証明の図を、本のカバーの絵に使つてみるという案をだしたが結局はボツになつた。

本を書きながら、微積分を勉強していたときの自分に奨めたくなるものにしたかと思つていた。そのころは用語や記号でどう読むのだろうと思つたものもあつたので、ふりがなをふつておいた。自分に奨められるものならほかの人にも奨めていいだろう。さて、わたし的にはこの三冊で完結したのだろうか？