第1章の問題

A 1.1 次の文を形式化し，x, y, X, Y などの文字と論理記号と $=, \in, \neq, \notin$ とかっこ $(,)$ だけを使って表わせ．また，その解答が正しいことを説明せよ．

1. X の元がただ1つ存在する．
2. $X = Y$ ならば，X の任意の元は Y の元である．
3. 2個以上の元を含む集合は存在しない．

A 1.2 A, B, C を，集合 X の部分集合とする．

1. $A \cup B \subset C$ と $A \subset C \wedge B \subset C$ が同値であることを，ベン図を使って確かめよ．
2. $C \subset A \vee C \subset B$ ならば $C \subset A \cup B$ であることを示せ．
3. $C \subset A \cup B$ ならば $C \subset A \vee C \subset B$，はなりたたない．このことを，反例を与えることで示せ．

A 1.3 X を集合とする．X の部分集合 A と B について，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $X = A \amalg B$.

(2) $B = X \setminus A$.

A 1.4 P, Q が集合 X の元に関する条件を表わすとし，$A = \{x \in X \mid P\}$，$B = \{x \in X \mid Q\}$ とおく．$A \not\subset B$ は $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ と同値であることを，ベン図を使って確かめよ．このことから，$\forall x \in X (P \Rightarrow Q)$ の否定は，$\exists x \in X (P \wedge \neg Q)$ と同値であることを導け．

B 1.5 1. X を集合とする．X の部分集合 $A = \{x \in X \mid x \notin x\}$ は X の元ではないことを示せ．

2. すべての集合を元として含む集合は存在しないことを示せ．

A 1.6 次の文を形式化し，x, y, X, Y などの文字と論理記号と $=, \in, \subset, \neq, \notin$ とかっこ $(,)$ だけを使って表わせ．また，その解答が正しいことを説明せよ．

1. 空集合でない集合が存在する．
2. 巾集合が空集合であるような集合が存在する．

A 1.7 X を集合とする．部分集合 $A \subset X$ に対し，$P(X)$ の部分集合 $I(A)$ を $I(A) = \{C \in P(X) \mid A \subset C\}$ で定める．

1. $I(A) = I(B)$ は $A = B$ と同値であることを示せ．
2. $I(A \cup B) = I(A) \cap I(B)$ を示せ．

A 1.8 1. 集合 X と Y に対し，$X \subset Y$ と $P(X) \subset P(Y)$ は，同値であることを示せ．

2. $1 \subsetneqq 2$ を示せ．
3. 補集合 $P(2) \setminus 3$ の元をすべて求めよ．
4. n が自然数ならば，$n \subset P(n)$ であることを示せ．

A 1.9 X と Y を集合とし，$a \in X, b \in Y$ とする．

1. $(a, b) = \{A \in P(X \cup Y) \mid \{a\} \subset A \subset \{a, b\}\}$ を示せ．
2. $x \in X$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $x=a$ である．

(2) 任意の $z\in(a,b)$ に対し，$x\in z$ である．

3. $y\in Y$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $y=b$ である．

(2) $y\in z$ をみたす元 $z\in(a,b)$ が，ただ1つ存在する．

4. $x\in X, y\in Y$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $x=a$ かつ $y=b$ である．

(2) $(x,y)=(a,b)$ である．

A 1.10 X と Y を集合とする．

1. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) $X\times Y=\emptyset$ である．

(2) $X=\emptyset$ または $Y=\emptyset$ である．

2. $A\subset X$ と $B\subset Y$ を，それぞれの部分集合とする．次の条件を考える．

(1) $A=X$ かつ $B=Y$ である．

(2) $A\times B=X\times Y$ である．

(1)⇒(2) であるが，(2)⇒(1) はなりたたない．(1) を修正して，(1)⇔(2) となるようにし，修正したものは確かになりたつことを示せ．

A 1.11 X を集合とし，巾集合の部分集合 $N\subset P(X)$ が，次の条件をみたすとする．

(1) $\emptyset\in N$ である．

(2) $A\in N$ かつ $B\in N$ かつ $C\subset A\cup B$ ならば，$C\in N$ である．

$A,B\in P(X)$ に対し，$A\sim_R B$ とは，$(A\cup B)\setminus(A\cap B)\in N$ のことと定める．

1. $\sim_R$ は $P(X)$ の同値関係であることを示せ．

2. $\sim_R$ に関する $\emptyset\in P(X)$ の同値類を求めよ．

3. $X=\{0,1,2\}$ とし，$N=\{\emptyset,\{2\}\}$ とする．$\sim_R$ に関する $P(X)$ の同値類の個数を求めよ．

A 1.12 $x,y\in\mathbb{R}^2$ に対し，$x=ay$ をみたす $a\in\mathbb{R}$ が存在するとき $x\sim y$ と書き，$x=ay$ をみたす $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ が存在するとき $x\sim^\times y$ と書くことにする．

1. $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ の同値関係ではないことを示せ．

2. $\sim^\times$ は $\mathbb{R}^2$ の同値関係であることを示せ．

3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=1\}$ と交わらない，$\mathbb{R}^2$ の $\sim^\times$ に関する同値類をすべて求めよ．

A 1.13 X を集合，$P(X)$ をその巾集合とし，$P(X)$ の元 A,B の関係 R を，$A\cap B\neq\emptyset$ で定義する．

1. R は，反射律をみたさないことを示せ．

2. R は，対称律をみたすことを示せ．

3. R が推移律もみたすための，X の条件を求めよ．

AP 1.14 X を集合とする．A を $X\times X$ の部分集合とし，${}^tA=\{(x,y)\in X\times X\mid(y,x)\in A\}$ とおく．X の元の対 (x,y) についての次の条件 R_A は，X の同値関係であることを示せ．

自然数 $n\geq 0$ と，X の元 $x=x_0,x_1,\ldots,x_n=y$ で，すべての $i=1,\ldots,n$ に対し，$(x_{i-1},x_i)\in A\cup {}^tA$ をみたすものが存在する．

A 1.15 X と Y を集合とし，$<_1$ と $<_2$ をそれぞれ X と Y の順序とする．

1. 積 $X \times Y$ の 2 項関係 $<_p$ を，$(x, y) <_p (x', y')$ とは，$x <_1 x'$ かつ $y <_2 y'$ のことであると定める．2 項関係 $<_p$ は，積 $X \times Y$ の順序であることを示せ．

2. 積 $X \times Y$ の 2 項関係 $<_l$ を，$(x, y) <_l (x', y')$ とは，$x <_1 x'$ であり，さらに $x = x'$ ならば $y <_2 y'$ であることと定める．このとき，2 項関係 $<_l$ は，積 $X \times Y$ の順序であることを示せ．

第 2 章の問題

A 2.1 1. 次の文のうち写像を定めているものはどれかを判定し，その理由も記述せよ．写像となるものについては，その写像を $f \colon X \to Y$ のように表し，元の対応も記号 $\mapsto$ を使って表せ．

(1) 正の実数 $y > 0$ に対し，実数 x で $y = e^x$ をみたすものを対応させる．
(2) 実数 a に対し，$b^2 = a$ をみたす実数 b を対応させる．
(3) 実数 x に対し，$xy = 1$ をみたす実数 y を対応させる．

2. 写像とならないものについては，写像となるように定義域と行き先を修正せよ．

A 2.2 X を集合とする．

1. 部分集合 A に対し，特性関数 $\chi_A \colon X \to 2$ のグラフを求めよ．

2. 部分集合 $A, B \subset X$ に対し，$X \setminus A,\ A \cap B,\ A \cup B$ の特性関数を，それぞれ χ_A, χ_B で表わせ．

A 2.3 X を集合とする．

1. $\Delta_X \subset X \times X$ を対角集合とする．特性関数 $\chi_{\Delta_X} \colon X \times X \to 2 = \{0, 1\}$ を求めよ．

2. 対角写像 $\delta \colon X \to X \times X$ のグラフを，$X \times X \times X$ の条件で定まる部分集合として表わせ．

A 2.4 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) = a\cos x + b\sin x$ で定まる関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $a\cos + b\sin$ で表わす．実数 a, b, c, d に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $\mathbb{R}^2$ での等式 $(a, b) = (c, d)$ がなりたつ．
(2) $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ での等式 $a\cos + b\sin = c\cos + d\sin$ がなりたつ．

A 2.5 X を集合とする．集合 $\mathrm{Map}(X, \emptyset)$ を求めよ．

A 2.6 1. X を集合とする．写像 $F, G \colon \mathrm{Map}(X, X) \times \mathrm{Map}(X, X) \to \mathrm{Map}(X, X)$ を，$F(f, g) = f \circ g$ と $G(f, g) = g \circ f$ で定める．$F = G$ であるための X についての条件を求めよ．

2. W, X, Y, Z を集合とする．図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(Y, Z) \times \mathrm{Map}(X, Y) \times \mathrm{Map}(W, X) & \xrightarrow{\circ \times 1} & \mathrm{Map}(X, Z) \times \mathrm{Map}(W, X) \\
{\scriptstyle 1 \times \circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\
\mathrm{Map}(Y, Z) \times \mathrm{Map}(W, Y) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Map}(W, Z)
\end{array}$$

は可換であることを示せ．

A 2.7 X を集合とし，$f\colon X \to X$ を $f^2 = \mathrm{id}_X$ をみたす写像とする．f は可逆であることを示せ．

A 2.8 X を集合とする．

1. 値写像 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Map}(1, X) \to X$ は可逆であることを示せ．
2. 写像 $f\colon X \to X$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は X の恒等写像 id_X である．
(2) 任意の集合 Y と任意の写像 $g\colon X \to Y$ に対し，$g \circ f = g$ である．
(3) 任意の写像 $g\colon X \to 2 = \{0, 1\}$ に対し，$g \circ f = g$ である．
(4) 任意の集合 T と任意の写像 $g\colon T \to X$ に対し，$f \circ g = g$ である．
(5) 任意の写像 $g\colon 1 = \{0\} \to X$ に対し，$f \circ g = g$ である．

A 2.9 $f\colon X \to Y$ を写像とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は可逆である．
(2) 任意の集合 Z に対し，写像 $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ は可逆である．

A 2.10 $a < b$ を実数とする．

1. $\bigcup_{a<s<t<b}[s, t] = (a, b)$ を示せ．
2. $\bigcap_{s<a<b<t}(s, t) = [a, b]$ を示せ．
3. 記号 $\displaystyle\bigcap_{s<a,\ b<t}(s, t)$ は，集合族の共通部分を表している．この集合族の添字の集合 I を，$\mathbb{R}^2$ の部分集合として表し，この集合族が定める巾集合への写像 $I \to P(\mathbb{R})$ による，I の元の値を表せ．

A 2.11 X, Y_1, Y_2 を集合とし，$f_1\colon X \to Y_1, f_2\colon X \to Y_2$ を写像とする．

1. 写像 $f\colon X \to Y_1 \times Y_2$ を，$x \in X$ に対し $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ で定める．f は，対角写像 $\delta\colon X \to X \times X$ と積写像 $f_1 \times f_2\colon X \times X \to Y_1 \times Y_2$ の合成 $(f_1 \times f_2) \circ \delta$ であることを確かめよ．
2. $X = Y_1 = Y_2$ かつ $f_1 = f_2 = \mathrm{id}_X$ のとき，対応する写像 $X \to X \times X$ は，対角写像であることを確かめよ．

A 2.12 $(X_i)_{i \in I}$ を集合の族とし，T を集合とする．$(f_i)_{i \in I}$ を写像 $f_i\colon T \to X_i$ の族とし，写像 $f\colon T \to \prod_{i \in I} X_i$ を $t \in T$ に対し $f(t) = (f_i(t))_i$ で定める．f は，対角写像 $\delta\colon T \to T^I$ と，積写像 $\prod_{i \in I} f_i\colon T^I \to \prod_{i \in I} X_i$ の合成であることを示せ．

A 2.13 $(X_i)_{i \in I}$ を集合族とし，T を集合とする．

1. $X = \prod_{i \in I} X_i$ とし，$i \in I$ に対し，$\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ を射影とする．写像 $F\colon \mathrm{Map}(T, X) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Map}(T, X_i)$ を，$f\colon T \to X$ に，写像の族 $(\mathrm{pr}_i \circ f)_{i \in I}$ を対応させることで定める．写像 F が可逆であることを示せ．
2. $X = \coprod_{i \in I} X_i$ とし，$i \in I$ に対し，$i_i\colon X_i \to X$ を標準写像とする．写像 $G\colon \mathrm{Map}(X, T) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Map}(X_i, T)$ を，$f\colon X \to T$ に，写像の族 $(f \circ i_i)_{i \in I}$ を対応させることで定める．写像 G が可逆であることを示せ．
3. X, Y, Z を集合とする．1. と 2. の可逆写像 F と G を使って，可逆写像

$$(X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z, \quad X^{Y \amalg Z} \to X^Y \times X^Z, \quad X^{Y \times Z} \to (X^Y)^Z$$

を定めよ．

A 2.14 X, Y を集合とし，P を X の元と Y の元の対に関する条件とする．$A = \{(x, y) \in X \times Y \mid P\}$ とおく．

1. $\forall x \in X \exists y \in Y P$ は，$\mathrm{pr}_1(A) = X$ と同値であることを示せ．
2. $\exists y \in Y \forall x \in X P$ は，$\{y \in Y \mid \mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset A\} \neq \emptyset$ と同値であることを示せ．

A 2.15 1. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と，$\mathbb{R}$ の部分集合 A で，$f^{-1}(f(A)) = A$ をみたさないものの例を，1つあげよ．

2. さらに，$\mathbb{R}$ の部分集合 A' で，$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ をみたさないものの例を，1つあげよ．

A 2.16 $f\colon X \to Y$ を写像とし，$f_*\colon P(X) \to P(Y)$ を $f_*(A) = f(A)$ で定める．$f_*(P(X)) = P(f(X))$ を示せ．

A 2.17 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とする．X を定義域とする写像 f で，f が定める同値関係による分割が次のものとなるものを，それぞれ1つ求めよ．

1. X の，原点を中心とする同心円による分割．
2. X の，原点を端点とする半直線による分割．

A 2.18 1. $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し $x - y \in \mathbb{Z}^2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の同値関係 R による商集合を，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表す．$\mathbb{R}^4$ の部分集合 T^2 を，$T^2 = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1\}$ で定める．写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ を，$f(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．f の標準分解は可逆写像 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2$ を定めることを示せ．

2. $\mathbb{C}$ の同値関係 R を，$z, w \in \mathbb{C}$ に対し，$z - w = 2\pi\sqrt{-1}n$ をみたす整数 $n \in \mathbb{Z}$ が存在するという条件で定め，商集合を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}(1)$ で表わす．$\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ とおくと，指数関数 $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の標準分解は，可逆写像 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{C}^\times$ を定めることを示せ．

3. 上半平面 $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ \tau > 0\}$ の同値関係 R を，$\tau, \sigma \in H$ に対し，$\tau - \sigma \in \mathbb{Z}$ という条件で定め，商集合を $H/\mathbb{Z}$ で表わす．$\Delta^* = \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\}$ とおき，関数 $q\colon H \to \mathbb{C}$ を $q(\tau) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ で定めると，q の標準分解は可逆写像 $H/\mathbb{Z} \to \Delta^*$ を定めることを示せ．

4. 巾集合への写像 $p\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^n)$ を，$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を x によって生成される部分空間 $\mathbb{R} \cdot x = \{a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ にうつすことで定める．$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \{L \in P(\mathbb{R}^n) \mid L$ は $\mathbb{R}^n$ の1次元部分空間$\}$ とし，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の同値関係 $\sim$ を，$x \sim y$ とは，$x = ay$ をみたす $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ が存在することと定める．このとき，写像 p の標準分解は，可逆写像 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\sim \to \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ を定めることを示せ．

A 2.19 X を集合とし，$A \subset X$ を部分集合とする．

1. X の2項関係 $\sim_A$ を，$x, y \in X$ に対し，$x \sim_A y$ とは，$x = y$ または $x, y \in A$ で定める．$\sim_A$ は同値関係であることを示せ．
2. $X/\sim_A$ を商集合とし，$q\colon X \to X/\sim_A$ を商写像とする．$A \neq \emptyset$ なら，q の $X \setminus A$ への制限は，可逆写像 $q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \to (X/\sim_A) \setminus \{A\}$ を定めることを示せ．

A 2.20 X を集合とし，$f\colon X \to X$ を写像，R_f を f が定める同値関係とする．$f^2 = f$ ならば，$f(X)$ は R_f に関する完全代表系であることを示せ．

AP 2.21 $f\colon X\to Y$ を写像とし，C を Y の同値関係のグラフとする．

1. $f\times f\colon X\times X\to Y\times Y$ による逆像 $(f\times f)^{-1}(C)\subset X\times X$ は，X の同値関係のグラフであることを示せ．

2. $g\colon Y\to Z$ を写像とし，R_g を $g\colon Y\to Z$ が定める同値関係とする．C を R_g のグラフとすると，$(f\times f)^{-1}(C)$ は合成写像 $g\circ f\colon X\to Z$ が定める同値関係のグラフであることを示せ．

AP 2.22 X を集合とする．巾集合の巾集合 $P(P(X))$ の部分集合 $\mathcal{P}$ と，$\mathrm{Map}(X,P(X))$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ と，$P(X\times X)$ の部分集合 $\mathcal{R}$ を，それぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{P\in P(P(X))\mid (A)_{A\in P}\text{は}\,X\,\text{の分割である}\},\\ \mathcal{Q} &= \{q\in \mathrm{Map}(X,P(X))\mid x\in X\,\text{ならば}\,q^{-1}(q(x))=q(x)\,\text{である}\},\\ \mathcal{R} &= \{C\in P(X\times X)\mid C\,\text{は}\,X\,\text{の同値関係のグラフである}\}\end{aligned}$$

で定める．

1. $q\in\mathcal{Q}$ ならば像 $q(X)\subset P(X)$ は $\mathcal{P}$ の元であり，$q\in\mathcal{Q}$ を $q(X)\in\mathcal{P}$ にうつす写像 $F\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{P}$ は，可逆であることを示せ．

2. $G\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{R}$ を，$q\in\mathcal{Q}$ を q が定める同値関係のグラフ $C_q\in\mathcal{R}$ にうつす写像とすると，G は可逆であることを示せ．

3. R を X の同値関係とし，$C\in\mathcal{R}$ をそのグラフとする．$q=G^{-1}(C)\in\mathcal{Q}$ は，商写像 $X\to X/R$ と包含写像 $X/R\to P(X)$ の合成であり，さらに $F(q)\subset P(X)$ は商集合 X/R であることを示せ．

AP 2.23 X と Y を集合とする．全射 $f\colon X\to Y$ に対し，分割 $(f^{-1}(y))_{y\in Y}$ を対応させる写像

$$\begin{aligned}&\{f\in\mathrm{Map}(X,Y)\mid f\ \text{は全射}\}\\ &\longrightarrow\{(X_y)_{y\in Y}\in\mathrm{Map}(Y,P(X))\mid (X_y)_{y\in Y}\ \text{は}\,X\,\text{の分割である}\}\end{aligned}$$

は，可逆であることを示せ．

AP 2.24 写像 $f\colon X\to Y$ が全射ならば，$f\circ g=\mathrm{id}_Y$ をみたす写像 $g\colon Y\to X$ が存在する．このことから，選択公理を導け．

AP 2.25 $f\colon X\to Y$ を写像とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は単射である．

(2) 任意の部分集合 $A\subset X$ に対し，$f^{-1}(f(A))=A$ である．

(3) 任意の部分集合 $A_1,A_2\subset X$ に対し，$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$ である．

AP 2.26 $f\colon X\to Y$ を写像とする．$f_*\colon P(X)\to P(Y)$ を $f_*(A)=f(A)$ で定め，$f^*\colon P(Y)\to P(X)$ を $f^*(B)=f^{-1}(B)$ で定める．

1. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は単射である．

(2) f_* は単射である．

(3) f^* は全射である．

2. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は全射である．

(2) f_* は全射である．

(3) f^* は単射である．

A 2.27 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を写像とする．

1. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) g は単射であり，$g \circ f$ は全射である．

(2) g は可逆であり，f は全射である．

2. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は全射であり，$g \circ f$ は単射である．

(2) f は可逆であり，g は単射である．

A 2.28 X を集合とし，R を X の順序とする．$x, y \in X$ に対し，$R(x, y)$ を $x <_R y$ で表わす．$x \in X$ に対し，$L(x) = \{y \in X \mid y <_R x\}$ とおく．

1. $x, y \in X$ に対し，$x <_R y$ と $L(x) \subset L(y)$ は同値であることを示せ．

2. $x \in X$ を $L(x) \in P(X)$ にうつす写像 $L\colon X \to P(X)$ は単射であることを示せ．

BP 2.29 $(X_i)_{i \in I}$ を集合の族とする．各 $i \in I$ に対し，$(X_{ij})_{j \in I}$ を X_i の部分集合の族とする．$(f_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ を，可逆写像 $f_{ij}\colon X_{ji} \to X_{ij}$ の族とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) 集合 X と単射の族 $(f_i\colon X_i \to X; i \in I)$ で，次の条件をみたすものが存在する:
$(f_i(X_i))_{i \in I}$ は X の被覆である．任意の $i, j \in I$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd}
X_{ji} \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[d, "\text{包含写像}"'] & & X_{ij} \arrow[d, "\text{包含写像}"] \\
X_j \arrow[r, "f_j"] & X & X_i \arrow[l, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

は可換であり，$f_i(X_i) \cap f_j(X_j) = f_i(X_{ij}) = f_j(X_{ji})$ である．

(2) 次の条件 (i), (ii) がなりたつ:

(i) 任意の $i \in I$ に対し，$X_{ii} = X_i$ である．

(ii) 任意の $i, j, k \in I$ に対し，$X_{ijk} = X_{ij} \cap X_{ik}$ とおくと，$f_{ji}(X_{ijk}) = X_{jik}$ であり，図式

$$\begin{tikzcd}
X_{ijk} \arrow[rr, "f_{ji}|_{X_{ijk}}"] \arrow[dr, "f_{ki}|_{X_{ijk}}"'] & & X_{jki} \arrow[dl, "f_{kj}|_{X_{jki}}"] \\
& X_{kij} &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

A 2.30 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする．関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，次の条件は同値であることを，写像が well-defined であるための判定法を適用して示せ．

(1) 関数 $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ で，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t) = g(\cos t, \sin t)$ をみたすものが存在する．

(2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t + 2\pi) = f(t)$ がなりたつ．

A 2.31 $\mathbb{R}$ の同値関係を $x-y\in\mathbb{Z}$ で定め，商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で表わす．

1. 実数 $a\in\mathbb{R}$ に対し，a 倍写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が，写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこすための a の条件を求めよ．

2. a を 1. の条件をみたす実数とし，$g_a\colon\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこされた写像とする．$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し，集合 $g_a^{-1}(x)$ の元の個数を求めよ．

A 2.32 $x,y\in\mathbb{R}^2$ に対し $x-y\in\mathbb{Z}^2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の同値関係 R による商集合を，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表し，$q\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を商写像とする．

1. $\mathbb{R}^3$ の元を列ベクトルで表わし，写像 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(s,t)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi s & -\sin 2\pi s & 0\\ \sin 2\pi s & \cos 2\pi s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\pi t+2\\ 0\\ \sin 2\pi t\end{pmatrix}$$

で定める．写像 $g\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^3$ で，$f=g\circ q$ をみたすものが，ただ 1 つ存在することを示せ．

g は単射であることも示せ．

2. $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ を整数とし，写像 $h\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，$h(s,t)=(as+bt,\ cs+dt)$ で定める．写像 $\bar{h}\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で，$\bar{h}\circ q=q\circ h$ をみたすものが，ただ 1 つ存在することを示せ．

$ad-bc=1$ ならば，$\bar{h}$ は可逆であることも示せ．

AP 2.33 $f\colon X\to Y$ を写像とし，R を X の同値関係とする．$q\colon X\to X/R$ を商写像とする．R が，f が定める同値関係 R_f よりも細かいと仮定する．$f=g\circ q$ をみたす写像 $g\colon X/R\to Y$ が存在することを，次のようにして示せ．

1. 単射 $i\colon Y\to P(Y)$ を $i(y)=\{y\}$ で定め，$f_*\colon P(X)\to P(Y)$ を $A\in P(X)$ を $f(A)\in P(Y)$ にうつす写像とする．図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y\\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i}\\ P(X) & \xrightarrow{f_*} & P(Y)\end{array}$$

は可換であることを示せ．

2. $f_*(X/R)\subset i(Y)$ を示せ．f_* の制限 $X/R\to i(Y)$ と，i が定める可逆写像 $Y\to i(Y)$ の逆写像 $i(Y)\to Y$ の合成を $g\colon X/R\to Y$ とすると，$f=g\circ q$ であることを示せ．

BP 2.34 X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の被覆とする．Y を集合とし，$(f_i)_{i\in I}$ を，写像 $f_i\colon X_i\to Y$ の族とする．

1. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) 写像 $f\colon X\to Y$ で，任意の $i\in I$ に対し $f|_{X_i}=f_i$ をみたすものが存在する．

(2) 任意の $i,j\in I$ に対し $f_i|_{X_i\cap X_j}=f_j|_{X_i\cap X_j}$ である．

2. (1) の条件をみたす写像 $f\colon X\to Y$ は，一意的であることを示せ．

A 2.35 自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対し，写像 $f_n\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を，$f_n(a)=na$ で定める．

1. f_n が単射であるための条件を求めよ．

2. f_n が全射であるための条件を求めよ．

第3章の問題

A 3.1 m を 2 以上の自然数とする．自然数の列の集合 D_m を，$D_m = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid n \geq 1$ ならば $a_n < m\}$ で定める．写像 $f_m \colon D_m \to [0, \infty)$ を，$f_m((a_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m^n}$ で定める．D_m の部分集合 E_m を，$E_m = \{(a_n) \in D_m \mid a_n \neq m-1$ となる自然数 n は有限個 $\}$ と定め，$D_m^* = D_m \setminus E_m$ とおく．

1. f_m の D_m^* への制限 $f_m|_{D_m^*} \colon D_m^* \to [0, \infty)$ は可逆であることを示せ．
2. f_m の E_m への制限 $f_m|_{E_m} \colon E_m \to [0, \infty)$ は単射であることを示せ．
3. $a = (a_n) \in E_m$ とする．n_0 を，任意の $n' > n$ に対し $a_{n'} = m-1$ となる最小の自然数 n とし，数列 $b = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を，

$$b_n = \begin{cases} a_n & n < n_0 \text{ のとき，} \\ a_{n_0} + 1 & n = n_0 \text{ のとき，} \\ 0 & n > n_0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.1}$$

で定める．$b \in D_m^*$ であり，b は $a \neq b$ かつ $f_m(a) = f_m(b)$ となる D_m のただ 1 つの元であることを示せ．

B 3.2 $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r$ かつ $r^2 < 2$ をみたす有理数 r が存在する $\}$ とおく．

1. L は切断であることを示せ．
2. $1 < L < 2$ であることを示せ．
3. $L^2 = 2$ を示せ．

BP 3.3 実数の連続性から，次の性質を導け：

任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，$a \leq n$ をみたす自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

B 3.4 1. 実数列 (a_n) に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) 数列 (a_n) は収束する．

(2) 任意の自然数 $N \geq 1$ に対し，有理数 r_N で，集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - r_N| \geq \frac{1}{N}\}$ は有限集合であるものが存在する．

2. 有理数列全体の集合 $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ の部分集合 C を，

$$C = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (a_n) \text{ は } 1. \text{ の条件 } (2) \text{ をみたす} \}$$

で定める．数列 $(a_n) \in C$ をその極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ にうつす写像 $l \colon C \to \mathbb{R}$ は，全射であることを示せ．

A 3.5 $n \geq 1$ を自然数とする．

1. $(0,1)^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．
2. $(0,1]^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ．

A 3.6 n を自然数とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．関数 $d(a,\ ) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x \in \mathbb{R}^n$ を $d(a,x) \in \mathbb{R}$ にうつすことで定める．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$a \notin U$ とする．関数 $d(a,\ )$ の U への制限には，最大値も最小値もないことを示せ．

A 3.7 1. 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が，開集合であるということを，論理記号を使って表わしたい．空欄を論理記号でうめよ．

$$\boxed{}\, x \in U\, \boxed{}\, r \in \mathbb{R}(r > 0\, \boxed{}\, (\, \boxed{}\, y \in \mathbb{R}^n(d(x,y) < r\, \boxed{}\, y \in U))).$$

2. 1.の答の $\boxed{}\, x \in U$ と $\boxed{}\, r \in \mathbb{R}$ の順序をいれかえた条件をみたす部分集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ をすべて求めよ．

A 3.8 (x_n) を $\mathbb{R}^m$ の点列とし，$a \in \mathbb{R}^m$ とする．$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm}), a = (a_1, \ldots, a_m)$ とする．次の条件は同値であることを示せ．
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ である．
(2) $i = 1, \ldots, m$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{ni} = a_i$ である．

A 3.9 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を写像とする．$a \in U$ とする．$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ とはどういうことかを，定義せよ．

A 3.10 U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とし，$a \in U$ とする．
1. f が a で連続であることを，形式化したい．

$$\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,(d(x,a) < q \Rightarrow d(f(x), f(a)) < r)$$

の空欄に，(a) $\forall r > 0$, (b) $\exists q > 0$, (c) $\forall x \in U$ を正しい順序で当てはめよ．
2. 1. の空欄に，(a), (b), (c) を誤った順序で入れた場合，それぞれの条件をみたす写像を求めよ．

A 3.11 連続写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ で定める．f は，連続写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に延長できないことを示せ．

A 3.12 写像 $f\colon SU(2) \to \mathbb{C}^2$ を $f(A) = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ で定める．f は可逆写像 $SU(2) \to S^3$ をひきおこすことを示し，逆写像を求めよ．

B 3.13 $n \geq 2$ を自然数とし，$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．連続写像 $f\colon SO(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ を，$f(A) = Ae_1$ で定める．
1. $f(SO(n,\mathbb{R})) = S^{n-1}$ を示せ．
2. $A \in SO(n,\mathbb{R})$ とする．$f^{-1}(f(A)) = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} \middle| B \in SO(n-1,\mathbb{R}) \right\}$ を示せ．

第4章の問題

A 4.1 1. $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{N}$ の位相は，離散位相であることを示せ．
2. $A \subset \mathbb{R}^n$ が有限部分集合ならば，A は部分空間として，離散空間であることを示せ．
3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 A に対し，A の位相が密着位相であるための条件は，A の元の個数が 1 以下であることを示せ．

4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b=\lim_{n\to\infty} a_n$, $B=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{b\}$ とおく．$\mathbb{R}$ の部分空間 $B\setminus\{b\}$ は，離散空間であることを示せ．B が離散空間ならば，$\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq b\}$ は有限集合であることも示せ．

A 4.2 1. X を集合とし．$(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ を X の位相の族とする．共通部分 $\mathcal{O}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_i$ は，X の位相であることを示せ．

2. 写像 $f,g\colon 3=\{0,1,2\}\to 2$ を，$f(0)=g(1)=0$, $f(1)=f(2)=g(0)=g(2)=1$ で定める．$\mathbb{S}$ の位相 $\mathcal{O}$ のひきもどし $f^*\mathcal{O}, g^*\mathcal{O}$ について，合併 $f^*\mathcal{O}\cup g^*\mathcal{O}$ は 3 の位相ではないことを示せ．

A 4.3 写像 $f\colon X\to Y$ と X の位相 $\mathcal{O}$ に対し，巾集合 $P(Y)$ の部分集合 $f_*\mathcal{O}$ を $\{f(U)\mid U\in\mathcal{O}\}$ で定める．

1. f が全射でなければ，$f_*\mathcal{O}$ は Y の位相でないことを示せ．
2. 全射 $f\colon X\to Y$ と X の位相 $\mathcal{O}$ で，$f_*\mathcal{O}$ が Y の位相でないもの例を 1 つあげよ．

BP 4.4 1. Y を位相空間，X を Y の部分空間とし，$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系とする．補集合 $Y\setminus X$ が一点 $c\in Y$ だけからなるとする．部分集合 $\mathcal{V}=\{U\cap X\mid U$ は c の開近傍 $\}\subset\mathcal{O}_X$ は，次の条件 (1) と (2) をみたすことを示せ．

(1) $U\in\mathcal{O}_X, V\in\mathcal{V}, U\supset V$ ならば，$U\in\mathcal{V}$ である．

(2) $(V_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{V}$ の元の有限族ならば，$\bigcap_{i\in I}V_i\in\mathcal{V}$ である．

2. c が Y の孤立点でないことは，次の条件 (3) と同値であることを示せ．

(3) $\emptyset\notin\mathcal{V}$.

3. X が Y の開部分空間であることは，Y の開集合系が $\mathcal{O}_X\amalg\{V\amalg\{c\}\mid V\in\mathcal{V}\}$ であることと同値であることを示せ．

4. X を位相空間とし，$\mathcal{O}_X$ を X の開集合系，$\mathcal{V}\subset\mathcal{O}_X$ を 1. の条件 (1) と (2) をみたす部分集合とする．$Y=X\amalg\{c\}$ を無縁和とし，巾集合 $P(Y)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ を，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_X\amalg\{V\amalg\{c\}\mid V\in\mathcal{V}\}$ で定める．$\mathcal{O}$ は Y の位相であることを示せ．

C 4.5 $r>0$ を実数，a を複素数とする．$U_r(a)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}$ 上定義された定数でない正則関数 $f\colon U_r(a)\to\mathbb{C}$ を考える．$b\in\mathbb{C}$ に対し，$U_r(a)$ の部分空間 $f^{-1}(b)$ は，離散であることを示せ．

A 4.6 位相空間から位相空間への写像が，連続であるための十分条件を，5 個以上あげよ．

A 4.7 $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ と $V=\mathbb{R}^2\setminus((-1,1)\times\{0\})$ は，どちらも $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>1\}$ と同相であることを示せ．

A 4.8 n を自然数とする．

1. 半径 1 の開球 $U_1(0)$ は，$\mathbb{R}^n$ と同相であることを示せ．
2. n 次元閉円板 D^n は，$(D^1)^n\subset\mathbb{R}^n$ と同相であることを示せ．

A 4.9 写像 $p\colon S^n\setminus\{(0,\ldots,0,1)\}\to\mathbb{R}^n$ を，

$$p(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\ldots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

で定める．$p\colon S^n\setminus\{(0,\ldots,0,1)\}\to\mathbb{R}^n$ は同相写像であることを示せ．

A 4.10 n を自然数とする．写像 $GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})\colon A \mapsto A^{-1}$ は同相写像であることを示せ．

A 4.11 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義する．

1. f は連続であることを示せ．
2. a, b を $a < b \leq a + 2\pi$ をみたす実数とする．f の (a,b) への制限は，うめこみであることを示せ．
3. f の $[0, 2\pi)$ への制限は連続単射だが，うめこみではないことを示せ．

A 4.12 X と Y を位相空間とする．

1. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．
   (1) f は連続である．
   (2) 任意の連続写像 $g\colon Y \to \mathbb{S}$ に対し，合成写像 $g \circ f\colon X \to \mathbb{S}$ は連続である．
   (3) 任意の位相空間 Z と任意の連続写像 $g\colon Y \to Z$ に対し，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ は連続である．
2. 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．
   (1) f は同相写像である．
   (2) 任意の位相空間 T に対し，写像 $f_*\colon C(T,X) \to C(T,Y)$ は可逆である．

A 4.13 $a < b$ を実数とする．

1. 半開区間 $[a,b)$ の閉包 $\overline{[a,b)}$ は，閉区間 $[a,b]$ であることを示せ．
2. 内部 $[a,b)^\circ$ は，開区間 (a,b) であることを示せ．

A 4.14 $n \geq 0$ を自然数とする．

1. 開球 $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ の閉包 $\overline{U_1(0)}$ は，閉球 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ であることを示せ．
2. 閉円板 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ の内部 $(D^n)^\circ$ は，開球 $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ であることを示せ．

A 4.15 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ とおく．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ の閉包は $B = A \cup \{b\}$ であることを示せ．

A 4.16 $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，7 つの集合 A, A°, $\overline{A}$, $\overline{A^\circ}$, $(\overline{A})^\circ$, $(\overline{A^\circ})^\circ$, $\overline{(\overline{A})^\circ}$ が，すべて相異（あいこと）なるものの例を 1 つ求めよ．

A 4.17 射影 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，閉写像でないことを示せ．

A 4.18 X を位相空間とする．X の部分集合 A について，次の条件は同値であることを示せ．

(1) A は，$\overline{A}$ の開集合である．
(2) $A = U \cap F$ をみたす X の開集合 U と X の閉集合 F が存在する．
(3) A の任意の点 x に対し，X の開近傍 U で，$A \cap U$ が U の閉集合となるものが存在する．

AP 4.19 X を位相空間とし, X の部分集合 A に対し, $\overline{A}$ でその閉包を表す.

1. 次がなりたつことを示せ.

(1) $\overline{A} \supset A$.

(2) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. $X = \mathbb{R}$ とする．$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ がなりたたない部分集合 A, B の例を 1 つあげよ.

AP 4.20 X を位相空間とし, $x \in X$ とする．次がなりたつことを示せ.

(1) X は x の近傍である.

(2) V が x の近傍ならば，$x \in V$ である.

(3) V が x の近傍で，$V \subset W \subset X$ ならば，W も x の近傍である.

(4) V と W が x の近傍ならば，$V \cap W$ も x の近傍である.

(5) V が x の近傍ならば，x の近傍 W で，任意の $y \in W$ に対し，V が y の近傍であるものが存在する.

AP 4.21 X を位相空間とする．開集合系 $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{O}$ の基底とする．次の条件 (1) と (2) がなりたつことを示せ.

(1) $U, V \in \mathcal{U}$ かつ $x \in U \cap V$ ならば，$W \in \mathcal{U}$ で $x \in W \subset U \cap V$ をみたすものがある.

(2) 任意の $x \in X$ に対し，$x \in U$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する.

第 5 章の問題

A 5.1 X を位相空間とする.

1. 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対し，次の条件は同値であることを示せ.

(1) f は上半連続である.

(2) 任意の $a \in X$ と任意の実数 $r > 0$ に対し，a の開近傍 U で，$U \subset \{x \in X \mid f(x) < f(a) + r\}$ をみたすものが存在する.

2. $(f_i)_{i \in I}$ を上半連続関数 $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ の族とし，任意の $x \in X$ に対し $\inf_{i \in I} f_i(x)$ が存在するとする．関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$ で定めると，f も上半連続であることを示せ.

3. 上半連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，連続関数ではないものの例を 1 つあげよ.

A 5.2 X を集合とし，$\mathcal{U}$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．$\mathcal{U}' = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}\}$ は，$\mathcal{U}$ によって生成される位相 $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ の基底であることを示せ.

A 5.3 X を集合とし，$F(X) = \{A \in P(X) \mid A \text{ は有限集合}\}$ とおく．$A, B \in F(X)$ に対し $d(A, B)$ を $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ の元の個数と定めると，d は $F(X)$ の距離であることを示せ．d が定める $F(X)$ の位相は離散位相であることも示せ.

A 5.4 $x, y \in S^2$ に対し，$\delta(x, y)$ を，$\langle x, y \rangle = \cos\theta$ をみたすただ 1 つの実数 $\theta \in [0, \pi]$ とする.

1. δ は S^2 の距離であることを示せ.

2. 包含写像 $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ は，S^2 の距離 δ と $\mathbb{R}^3$ のふつうの距離 d に関して閉うめこみであることを示せ.

A 5.5 X を集合とし，d を距離とする．$M > 0$ を正の実数とする．$d^M\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を，$d^M(x, y) = \min(d(x, y), M)$ で定める．

1. d^M は距離であることを示せ．
2. d^M は d と同値であることを示せ．

A 5.6 X を距離空間とする．

1. X の部分集合 U について，次は同値であることを示せ．

(1) U は開集合である．

(2) $U = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ をみたす連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が存在する．

2. A と B を X の閉集合とし，$A \cap B = \emptyset$ とする．連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ で，$A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$ をみたすものが存在することを示せ．

B 5.7 $f\colon D^2 \to \mathbb{R}$ を有界な関数とする．$t \in [0, 1]$ に対し，関数 $g_t \in \widetilde{B}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ を，$g_t(x) = f(t\cos x, t\sin x)$ で定め，写像 $g\colon [0, 1] \to \widetilde{B}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ を，$g(t) = g_t$ で定める．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は $(0, 0)$ で連続である．

(2) $\widetilde{B}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ の一様収束位相に関して，$g\colon [0, 1] \to \widetilde{B}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ は $t = 0$ で連続である．

B 5.8 X を集合とし，Y を距離空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ に対し，関数 $D_f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を，$D_f(x, y) = d(f(x), y)$ で定める．$\widetilde{B}(X, Y) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(X)$ は Y の有界部分集合$\}$ とおく．

1. 写像 $D\colon \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X \times Y, \mathbb{R})$ を，$D(f) = D_f$ で定める．D は単射であることを示せ．
2. $f, g \in \widetilde{B}(X, Y)$ とし，$d_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ とおく．$D_f - D_g \in \widetilde{B}(X \times Y)$ であることを示せ．$\|D_f - D_g\|_\infty = d_{\sup}(f, g)$ であることも示し，$d_{\sup}$ は $\widetilde{B}(X, Y)$ の距離であることも示せ．
3. $\widetilde{B}(X, Y)$ を $d_{\sup}$ により距離空間と考える．$b \in Y$ とし，b で定値写像 $X \to Y$ も表わす．写像 $\Delta_b\colon \widetilde{B}(X, Y) \to \widetilde{B}(X \times Y, \mathbb{R})$ を，$\Delta_b(f) = D_f - D_b$ で定めると，Δ_b は等長写像であることを示せ．
4. X を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ に対し，f が連続であることと，D_f が連続であることは同値であることを示せ．$B(X, Y) = \{f \in \widetilde{B}(X, Y) \mid f$ は連続$\}$ は，$\widetilde{B}(X, Y)$ の閉集合であることも示せ．

B 5.9 p を素数とする．0 でない有理数 r を $r = p^e \frac{n}{m}$ (n と m は p と素) と表わしたとき，$e = v_p(r)$ とおく．有理数 r に対し，$r \neq 0$ のとき $|r|_p = p^{-v_p(r)}$ とおき，$|0|_p = 0$ とおく．

1. $r, s \in \mathbb{Q}, r, s \neq 0$ に対し，$r + s \neq 0$ ならば $v_p(r + s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$ であることを示せ．
2. $x, y \in \mathbb{Q}$ に対し，$d_p(x, y) = |x - y|_p$ とおく．d_p は $\mathbb{Q}$ の距離を定めることを示せ．

A 5.10 連続写像 $f\colon T^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ を，$f((s, t), (u, v)) = (s \cdot (u + 2), t \cdot (u + 2), v)$ で定める．

1. f は，うめこみであることを示せ．

2. f の像は，xz 平面内の点 $(2,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を，z 軸を中心に回転して得られる面であることを示し，$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}+3=0\}$ であることを示せ．

A 5.11 X を位相空間とする．関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) $U=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)<y\}$ と $V=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)>y\}$ は，$X\times\mathbb{R}$ の開集合である．

A 5.12 $n\geq 1$ を自然数とする．連続写像 $p\colon S^{n-1}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ を，$p(x,r)=r\cdot x$ で定める．

1. p の制限 $f\colon S^{n-1}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ は同相写像であることを示せ．
2. 長さが定める写像 $\|\ \|\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ は，開写像であることを示せ．

A 5.13 X と Y を位相空間とし，$b\in Y$ とする．連続写像 $i_b\colon X\to X\times Y$ を $i_b(x)=(x,b)$ で定め，$\mathcal{V}=\{V\in P(Y)\mid V$ は b の開近傍$\}$ とおく．部分集合 $A\subset X\times Y$ に対し，$i_b^{-1}(\overline{A})=\bigcap_{V\in\mathcal{V}}\overline{\mathrm{pr}_1((X\times V)\cap A)}$ を示せ．

A 5.14 X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．$(f_i\colon X\to X_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．X の位相 $\mathcal{O}$ について，次の条件は同値であることを示せ．

(1) $\mathcal{O}$ は，X の $(f_i)_{i\in I}$ による誘導位相より細かい．

(2) 任意の $i\in I$ に対し，$f_i\colon X\to X_i$ は $\mathcal{O}$ に関して連続である．

A 5.15 X を集合とし，$\mathcal{U}\subset P(X)$ を巾集合 $P(X)$ の部分集合とする．$\mathcal{U}$ で生成される位相は，特性関数の族 $(\chi_U\colon X\to\mathbb{S})_{U\in\mathcal{U}}$ による誘導位相であることを示せ．

B 5.16 n を自然数とする．

1. 写像 $F\colon U(n)\times(0,\infty)^n\times\mathbb{C}^{\binom{n}{2}}\to GL(n,\mathbb{C})$ を，

$$F(U,(b_i)_{1\leq i\leq n},(b_{ij})_{1<i<j<n})=U\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{(n-1)n}\\ 0 & \cdots & 0 & b_n\end{pmatrix}$$

で定める．F は同相写像であることを示せ．

2. F の制限は，同相写像 $O(n,\mathbb{R})\times(0,\infty)^n\times\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}\to GL(n,\mathbb{R})$ を定めることを示せ．
3. 同相写像 F による，$SL(n,\mathbb{R})$ と $SL(n,\mathbb{C})$ の逆像を求めよ．

B 5.17 X を位相空間とし，Y を距離空間とする．$\widetilde{B}(X,Y)$ を，問題 5.8 で定めた距離 $d_{\sup}$ により距離空間と考える．$\widetilde{B}(X,Y)$ の部分空間 $B(X,Y)=\{f\in\widetilde{B}(X,Y)\mid f$ は連続$\}$ を，距離 $d_{\sup}$ が定める一様収束位相により位相空間と考える．値写像 $B(X,Y)\times X\to Y$ は，積位相に関して連続であることを示せ．

A 5.18 1. 商写像 $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は開写像であることを示せ．

2. a,b を $a<b\leq a+1$ をみたす実数とする．包含写像 $i\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ がひきおこす連続単射 $\bar{i}\colon(a,b)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，開うめこみであることを示せ．

A 5.19 $f\colon [0,1]\to[0,1]$ と $g\colon [0,1]\to[0,1]$ を，$f(t)=\frac{t}{2}, g(t)=\frac{t+1}{2}$ で定める．写像の対 (f,g) による $[0,1]$ の像位相は，$\mathbb{R}$ の部分空間としての位相と等しいことを示せ．

A 5.20 X を閉区間 $[0,1]$ とし，A を部分空間 $(0,1]$ とする．A を一点につぶして得られる空間 Y は，$\mathbb{S}$ と同相であることを示せ．

A 5.21 X を位相空間とし，$A\subset X$ を空でない部分集合とする．A を一点につぶして得られる空間を Y とし，$q\colon X\to Y$ を商写像とする．$q(A)=\{c\}$ とおく．

1. $q(A)=\{c\}$ が閉集合であることと，A が閉集合であることは同値であることを示せ．
2. A が閉集合であるとする．q の $X\setminus A$ への制限 $q|_{X\setminus A}\colon X\setminus A\to Y$ は，開うめこみであることを示せ．

A 5.22 X を位相空間とし，集合 I を離散位相空間と考える．$f\colon X\to I$ を写像とし，$i\in I$ に対し $X_i=f^{-1}(i)$ を X_i の部分空間と考える．次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) 包含写像 $j_i\colon X_i\to X$ の族の直和 $\coprod_{i\in I}X_i\to X$ は，位相空間の直和 $\coprod_{i\in I}X_i$ からの同相写像である．

B 5.23 1. $f\colon \mathbb{R}\to S^1$ を $f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ で定める．f は同相写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$ をひきおこすことを示せ．

2. $[0,1]$ の部分集合 $\{0,1\}$ を一点につぶして得られる空間を $[0,1]/R$ とする．包含写像 $i\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ がひきおこす写像 $\bar{i}\colon [0,1]/R\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，同相写像であることを示せ．

3. 包含写像がひきおこす連続全単射 $[0,1)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，同相写像でないことを示せ．

BP 5.24 X と Y を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．$(V_i)_{i\in I}$ を Y の開被覆とすると，次の条件は同値であることを示せ．

(1) Y の位相は，f による像位相である．

(2) 任意の $i\in I$ に対し，V_i の位相は，f の制限 $f_i\colon f^{-1}(V_i)\to V_i$ による像位相である．

B 5.25 $1\leq i\leq n+1$ に対し，$U_i=\{(x_1:\ldots:x_{n+1})\in\mathbf{P}^n(\mathbb{R})\mid x_i\neq 0\}$ とおく．

1. $(U_1,\ldots,U_{n+1})$ は，$\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ の開被覆であることを示せ．
2. $j_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を $j_i(x_1,\ldots,x_n)=(x_1:\ldots:x_{i-1}:1:x_i:\ldots:x_n)$ で定める．j_i は，同相写像 $\mathbb{R}^n\to U_i$ を定めることを示せ．
3. 単射線形写像 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ を，$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,0)$ で定め，写像 $f_*\colon\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})\to\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ を，$f_*(L)=f(L)$ で定める．$f_*(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}))=\mathbf{P}^n(\mathbb{R})\setminus U_{n+1}$ であり，$f_*\colon\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})\to\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ は閉うめこみであることを示せ．

B 5.26 X と Y を位相空間とし，$f\colon X\to Y$ を連続全射とする．

1. f が開写像ならば，Y の位相は $\{f(U)\mid U$ は X の開集合$\}$ であり，f による像位相であることを示せ．
2. X の部分集合 A に対し，$f_!(A)=\{y\in Y\mid f^{-1}(y)\subset A\}$ とおく．f が閉写像ならば，Y の位相は $\{f_!(U)\mid U$ は X の開集合$\}$ であり，f による像位相であることを示せ．

B 5.27 X を集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を X の被覆とする．$i \in I$ に対し，$\mathcal{O}_i$ を X_i の位相とし，X_i を位相空間と考える．次の条件は同値であることを示せ．

(1) 包含写像の族 $(j_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ による像位相によって，X を位相空間と考えると，$(X_i)_{i\in I}$ は X の開被覆であり，任意の $i \in I$ に対し，$j_i\colon X_i \to X$ は開うめこみである．

(2) 任意の $i, j \in I$ に対し，$X_i \cap X_j$ は，X_i と X_j の開部分空間であり，X_i からの相対位相と X_j からの相対位相は等しい．

C 5.28 A を閉区間 $[0,1]$ の空でない部分集合とし，$Z = [0,1] \setminus A$ を補集合とする．$[0,1] \times [0,1]$ の部分空間 X を $X = ([0,1] \times [0,1]) \setminus (Z \times \{0\})$ で定める．$A \times \{0\} \subset X$ を一点につぶして得られる空間を Y とし，$q\colon X \to Y$ を商写像とする．$\{y_0\} = q(A \times \{0\})$ とおく．積空間 $X \times Z \subset [0,1]^3$ の閉集合 B を $B = \{(x,y,z) \in X \times Z \mid |x - z| \leq y\}$ で定める．

1. 積写像 $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ による像位相に関して，像 $C = (q \times \mathrm{id}_Z)(B)$ は，閉集合であることを示せ．

2. $Y \times Z$ の積位相に関する C の閉包を $\overline{C}$ とすると，$\overline{C} \setminus C = \{y_0\} \times (\overline{(A \cap \overline{Z})} \cap Z)$ であることを示せ．

3. A も Z も $[0,1]$ で稠密ならば，$Y \times Z$ の積位相は，積写像 $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ による像位相より，真に粗いことを示せ．

第 6 章の問題

A 6.1 1. X がハウスドルフ空間ならば，X の有限部分集合はすべて離散閉集合であることを示せ．

2. X を有限な位相空間とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) X はハウスドルフである．

(2) X は離散である．

(3) X の任意の点 x に対し，$\{x\}$ は閉集合である．

A 6.2 X を位相空間とし，R を X の同値関係とする．商空間 X/R がハウスドルフならば，R のグラフ C は $X \times X$ の閉集合であることを示せ．

（このことの逆はなりたたない．反例は問題 6.5 にある．）

A 6.3 X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$A \subset X$ を稠密な部分集合とし，Y はハウスドルフであるとする．$\Gamma_A \subset A \times Y$ を f の A への制限のグラフとすると，f のグラフは，Γ_A の $X \times Y$ での閉包と等しいことを示せ．

B 6.4 $n \geq 1$ を自然数とする．

1. たてベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対し ${}^t x \in M(1,n;\mathbb{R})$ でその転置を表わし，連続写像 $V\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M(n,\mathbb{R})$ を，$V(x) = \dfrac{x\,{}^t x}{{}^t x x}$ で定める．$V\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to M(n,\mathbb{R})$ は，連続単射 $\overline{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ をひきおこすことを示せ．

2. 射影空間 $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ は，ハウスドルフであることを示せ．

B 6.5 $X = [0,1] \times [0,1]$ の部分集合 A と U と T を，

$$A = \{0\} \times (0,1], \quad U = X \setminus \{(0,0)\}, \quad T = X \setminus A$$

で定める．U,T を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．包含写像 $U \to X, T \to X$ による像位相により，X を位相空間と考える．Y を，$A \subset X$ を一点につぶしてえられる空間とし，$q\colon X \to Y$ を商写像とする．

1. A は X の閉集合であることを示せ．
2. X の位相は，$\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相より真に細かいことを示せ．
3. X はハウスドルフであることを示せ．
4. Y はハウスドルフでないことを示せ．
5. $q \times q$ による Δ_Y の逆像は，$X \times X$ の閉集合であることを示せ．

A 6.6 1. $a < b$ を実数とする．開区間からの連続関数 $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ で，同相写像であるものを 1 つ与えよ．

2. 連続関数 $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ で，同相写像であるものを 1 つ与えよ．

A 6.7 1. $n \geq 1$ なら S^n は連結であることを示せ．

2. T^n も連結であることを示せ．

A 6.8 X を位相空間とし，A と B を X の連結部分集合とする．次の条件を考える．

(1) $A \cap B \neq \emptyset$ である．
(2) $A \cup B$ は連結である．
(3) $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ である．

1. (2)⇒(3) を示せ．
2. $X = \mathbb{R}$ とする．(2)⇒(1) の反例を与えよ．(3)⇒(2) の反例も与えよ．

A 6.9 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とする．0 を含む $\mathbb{Q}$ の連結成分は，$\{0\}$ であり，$\mathbb{Q}$ の開集合でないことを示せ．

B 6.10 1. U を $\mathbb{R}^n$ の連結開集合とし，$a \in U$ とする．$U \setminus \{a\}$ は，$n \geq 2$ なら連結であり，$n = 1$ なら連結でないことを示せ．

2. $\mathbb{R}$ と半開区間 $[0,1)$ は同相でないことを示せ．
3. $n \geq 2$ なら，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でないことを示せ．

B 6.11 X を位相空間とし，$F\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．任意の $x \in X$ と $y, z \in \mathbb{R}$ に対し，$y < z$ なら $F(x,y) < F(x,z)$ であると仮定する．a を実数とし，$\Gamma_a = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = a\}$ は関数 $f_a\colon X \to \mathbb{R}$ のグラフであるとする．

1. 関数 f_a は連続であることを示せ．
2. $b > a$ を実数とし，$\Gamma_b = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = b\}$ も関数 $f_b\colon X \to \mathbb{R}$ のグラフであるとする．$\Gamma = \{(x,z,y) \in X \times [a,b] \times \mathbb{R} \mid F(x,y) = z\}$ は，連続関数 $G\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ のグラフであることを示せ．

B 6.12 X を位相空間とする．$x, y \in X$ に対し，$x, y \in A$ をみたす連結部分集合 $A \subset X$ が存在するという条件で，X の同値関係 R を定める．

1. $x, y \in X$ に対し，$x = f(0), y = f(1)$ をみたす連続写像 $f\colon [0,1] \to X$ が存在するという条件は，X の同値関係 R' を定めることを示せ．R' は，R より細かいことも示せ．
2. X を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．同値関係 R と R' は同値であり，X の連結成分は X の開集合であることを示せ．

B 6.13 $f\colon X \to Y$ を連続写像とし，A を X の部分集合とする．任意の $y \in f(A)$ に対し $A \cap f^{-1}(y)$ が連結であり，$f(A)$ の位相が $f\colon A \to f(A)$ による像位相であるとする．$f(A)$ が連結ならば，A も連結であることを示せ．

B 6.14 問題6.5と同様に，$X = [0,1] \times [0,1]$ の部分集合 U と T を，$U = X \setminus \{(0,0)\}, T = X \setminus (\{0\} \times (0,1])$ で定める．U, T を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．包含写像 $U \to X, T \to X$ による像位相により，X を位相空間と考える．$f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．

1. $A = \{0\} \times [0,1]$ は連結でないことを示せ．
2. $f\colon X \to \mathbb{R}$ は，X の $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相に関して連続であることを示せ．
3. $f(A)$ は閉区間であることを示せ．

BP 6.15 $^{\mathrm{AC}}$ $(X_i)_{i \in I}$ を位相空間の族とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) 任意の $i \in I$ に対し，X_i は連結である．

(2) 積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は連結である．

C 6.16 $n \geq 1$ を自然数とする．

1. $SO(n, \mathbb{R})$ は連結であることを示せ．
2. 関数 $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ を，$x = \mathrm{sgn}(x)|x|$ で定める．$\mathrm{sgn} \circ \det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ は，可逆写像 $\pi_0(GL(n, \mathbb{R})) \to \{\pm 1\}$ をひきおこすことを示せ．

A 6.17 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を収束する実数列とし，$b = \lim_{n \to \infty} a_n$ とおく．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．

1. $B = A \cup \{b\}$ はコンパクトであることを示せ．
2. A がコンパクトならば，$b \in A$ であることを示せ．

A 6.18 下の文は，X の部分集合 A がコンパクトでないことのいいかえとして，誤った文である．正しい文に直せ．

X の開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ で $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ をみたし，さらに I の有限個の元 $i_1, \ldots, i_n$ と A の元 x で，$x \notin U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となるものが存在する．

A 6.19 $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ で，$(0,1] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ をみたし，任意の有限部分集合 $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ に対し $(0,1] \not\subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となるものを1つ与えよ．

A 6.20 閉区間 $[a,b]$ のコンパクト性の証明で，閉区間 $[a,b]$ を半閉区間 $[a,b)$ あるいは $(a,b]$ でおきかえると，証明がうまくいかなくなるところを，それぞれの場合にみつけよ．

A 6.21 X を距離空間とする．X が全有界なら，X は有界であることを示せ．

B 6.22 1. 自然数 n に対し，写像 $q_n\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^n$ を，$q_n((x_m)) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ で定める．(p_n) を，写像 $p_n\colon 2^n \to 2 = \{0,1\}$ の列で次の条件をみたすものとする．

(1) 任意の $x \in 2^{\mathbb{N}}$ に対し，$p_n(q_n(x)) = 1$ をみたす n が存在する．

(2) 任意の $n \geq 0$ と任意の $x \in 2^n$ に対し，$p_{n+1}((x,0)) = p_{n+1}((x,1)) = 1$ ならば $p_n(x) = 1$ である．

このとき，$p_0 = 1$ であることを示せ．

2. 離散空間 $2 = \{0,1\}$ の積空間 $2^{\mathbb{N}}$ は，コンパクトであることを（チコノフの定理を使わずに）示せ．

A 6.23 n を自然数とし，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．関数 $d(a,\ )\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x \in \mathbb{R}^n$ を $d(a,x) \in \mathbb{R}$ にうつすことで定める．$A \subset \mathbb{R}^n$ を空でない閉集合とする．関数 $d(a,\ )$ の A への制限には，最小値があることを示せ．

A 6.24 1. W を，$\mathbb{R} \times \{0\}$ の開近傍 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\}$ とする．0 の開近傍 $V \subset \mathbb{R}$ で，$\mathbb{R} \times V \subset W$ をみたすものは存在しないことを示せ．

2. 1. から，$\mathbb{R}$ がコンパクトでないことを導け．

3. 問題 4.17 と射影によるコンパクト性の判定法から，$\mathbb{R}$ がコンパクトでないことを導け．

A 6.25 1. T^n はコンパクトであることを示せ．

2. $O(n,\mathbb{R})$ はコンパクトであることを示せ．

A 6.26 $X = [0,1] \times \mathbb{S}$ とし，$A = X \setminus \{(0,1)\}$ とおく．

1. 任意の位相空間 Y に対し，$Y \times \{0\} \subset Y \times \mathbb{S}$ の開近傍は，$Y \times \mathbb{S}$ だけであることを示せ．

2. A はコンパクト集合であることを示せ．

3. $B = [0,1] \times \{1\} \subset X$ もコンパクトだが，共通部分 $A \cap B$ はコンパクトでないことを示せ．

B 6.27 1. 問題 6.22.1. と積位相によるコンパクト性の判定法から，$2^{\mathbb{N}}$ がコンパクトであることを導け．

2. 1. と，2 進小数展開が定める写像 $2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ が連続であることから，閉区間 $[0,1]$ がコンパクトであることを導け．

B 6.28 積位相によるコンパクト性の判定法から，最大値の定理を導け．

B 6.29 $n \geq 1$ を自然数とする．長さが定める写像 $\|\ \|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ は，閉写像であることを示せ．

B 6.30 1. X を空でないコンパクト空間とし，Y を位相空間，$f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$y \in Y$ に対し，関数 $g_y\colon X \to \mathbb{R}$ を $g_y(x) = f(x,y)$ で定める．$y \in Y$ を g_y の最大値 $M(y)$ にうつす関数 $M\colon Y \to \mathbb{R}$ は，連続であることを示せ．

2. $X = (0,1], Y = [0,1]$ とする．連続関数 $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ で，任意の $y \in Y$ に対し，$g_y(x) = f(x,y)$ で定まる関数 $g_y\colon X \to \mathbb{R}$ の最大値 $M(y)$ が存在し，さらに，$y \in Y$ を $M(y)$ にうつす関数 $M\colon Y \to \mathbb{R}$ は連続でないものの例を 1 つ与えよ．

B 6.31 X と T を位相空間とし，写像 $f\colon T \to X$ について，次の条件を考える．

(1) f は連続である．

(2) f のグラフ $\Gamma = \{(t,x) \in T \times X \mid f(t) = x\}$ は積空間 $T \times X$ の閉集合である．

1. X がコンパクトなら，(2) $\Rightarrow$ (1) がなりたつことを示せ．

2. 連続でない関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ で，(2) をみたすものの例をあげよ．

BP 6.32 X と Y を距離空間とし，d_X と d_Y をそれぞれの距離とする．$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．X がコンパクトなら，次の条件がみたされることを示せ．

任意の実数 $r > 0$ に対し，実数 $q > 0$ で，$d_X(x,x') < q$ をみたす任意の $x, x' \in X$ に対し，$d_Y(f(x), f(x')) < r$ をみたすものが存在する．

A 6.33 $n \geq 1$を自然数とする．$f\colon \mathbb{R} \to S^1 = T^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．積写像 $f^n\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ がひきおこす写像 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$ は，同相写像であることを示せ．

A 6.34 $X = S^1 \times [0,1]$ を積空間とし，X の開集合 U と閉集合 A を，それぞれ $U = S^1 \times [0,1)$ と $A = S^1 \times \{0\}$ で定める．X の部分集合 A を一点につぶして得られる空間を $\overline{X}$ で表わし，U の部分集合 A を一点につぶして得られる空間を $\overline{U}$ で表わす．

1. 連続写像 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を，$f((x,y),t) = (tx, ty)$ で定める．f は同相写像 $\bar{f}\colon \overline{X} \to D^2$ をひきおこすことを示せ．

2. f の U への制限 $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ は，開うめこみ $\bar{g}\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ をひきおこすことを示せ．

B 6.35 $f\colon (0,1] \to [0,1]$ を連続関数とし，$\Gamma \subset (0,1] \times [0,1]$ をそのグラフ，$\overline{\Gamma} \subset [0,1] \times [0,1]$ を Γ の閉包とする．

1. $A = \{y \in [0,1] \mid (0,y) \in \overline{\Gamma}\}$ とおく．$A = [a,b]$ をみたす実数 $a \leq b$ が存在することを示せ．

2. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(t)$ が存在する．

(2) f を延長する連続関数 $\bar{f}\colon [0,1] \to [0,1]$ が存在する．

(3) $\overline{\Gamma}$ は関数 $[0,1] \to [0,1]$ のグラフである．

(4) $\overline{\Gamma}$ は弧状連結である．

3. $[0,1] \times [0,1]$ の連結な閉部分集合で，弧状連結ではないものの例をあげよ．

B 6.36 $3 = \{0,1,2\}$ を離散空間とし，$e_3\colon 3^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，3 進小数展開が定める無限積空間 $3^{\mathbb{N}}$ からの連続写像とする．$2 = \{0,1\}$ を離散空間とし，無限積空間 $2^{\mathbb{N}}$ からの連続写像 $c_3\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を，$c_3((a_n)) = 2e_3((a_n)) = e_3((2a_n))$ で定める．

1. $c_3(2^{\mathbb{N}}) \subset [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ を示せ．

2. c_3 は閉うめこみであることを示せ．

B 6.37 問題 6.4 の連続単射 $\overline{V}\colon \mathbf{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to S^{n^2-1}$ は，閉うめこみであることを示せ．

B 6.38 $X = [0,1] \times [0,1], Y = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid x \leq y\}$ とし，連続写像 $f\colon X \to Y$ を $f(x,y) = (xy, y)$ で定める．

1. $[0,1] \times \{0\} \subset X$ を一点につぶして得られる空間を X' とする．$f\colon X \to Y$ は同相写像 $X' \to Y$ をひきおこすことを示せ．

2. $U = X \setminus ((0,1] \times \{0\})$ とする．$V = \{(x,y) \in Y \mid 2x < y$ または $x = 0\}$ は，$f|_U\colon U \to Y$ による像位相について，開集合であることを示せ．

3. 包含写像 $U \to X$ がひきおこす連続全単射 $U \to X'$ は，同相写像でないことを示せ．

C 6.39 1. $4 = \{0,1,2,3\}$ を離散空間とする．$(a_n) \in 4^{\mathbb{N}}$ に対し，$(b_n) \in 4^{\mathbb{N}}$ を

$$b_n = \begin{cases} 4 - a_n & a_n = 1,3 \text{ かつ } b_k = 0 \text{ となる } 0 \leq k < n \text{ の個数が奇数} \\ 2 - a_n & a_n = 0,2 \text{ かつ } b_k = 3 \text{ となる } 0 \leq k < n \text{ の個数が奇数} \\ a_n & \text{それ以外} \end{cases}$$

で，帰納的に定める．同相写像 $\tilde{p}\colon 4^{\mathbb{N}} \to 4^{\mathbb{N}}$ を，$\tilde{p}((a_n)) = (b_n)$ で定める．写像 $\pi_1, \pi_2\colon 4 \to 2$ を，$(\pi_1(0), \pi_2(0)) = (0,0)$，$(\pi_1(1), \pi_2(1)) = (0,1)$，$(\pi_1(2), \pi_2(2)) = (1,1)$，$(\pi_1(3), \pi_2(3)) =$

$(1,0)$ で定める，同相写像 $q\colon 4^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ を，$q((a_n)) = ((\pi_1(a_n)), (\pi_2(a_n)))$ で定める．$e_2\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, $e_4\colon 4^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ を，それぞれ 2 進小数展開と 4 進小数展開が定める連続全射とする．連続写像 $p\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
4^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "e_4"'] & 4^{\mathbb{N}} \arrow[r, "q"] & 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \arrow[d, "e_2 \times e_2"] \\
{[0,1]} \arrow[rr, "p"] & & {[0,1] \times [0,1]}
\end{tikzcd}$$

が可換になるものがただ 1 つ存在することを示せ．

2. 連続全単射 $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ は存在しないことを示せ．
3. 1. で定義した写像 p は，全射だが単射でないことを示せ．

A 6.40 コンパクト空間 $[0,1] \times [0,1]$ の部分空間 $([0,1] \times [0,1]) \setminus (\{0\} \times (0,1])$ を A とし，U を $(0,0) \in A$ の任意の開近傍とする．U を含む A のコンパクト集合は存在しないことを示せ．

A 6.41 (a_n) を収束する実数列とし，$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく，写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を $f(n) = a_n$ で定め，$X = f(\mathbb{N}) \amalg \{b\}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とする．f が単射であり，$b \notin f(\mathbb{N})$ ならば，X は，f に関して，離散空間 $\mathbb{N}$ の一点コンパクト化であることを示せ．

A 6.42 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と考え，その一点コンパクト化を，立体射影により，S^2 と考える．写像 $j\colon \mathbb{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を，$j(z) = (z:1)$ で定める．j が定める同相写像 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$ による，$(z:w) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の像は，

$$\left(\frac{2\mathrm{Re}\ z\overline{w}}{|z|^2+|w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}\ z\overline{w}}{|z|^2+|w|^2}, \frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2}\right)$$

であることを示せ．

A 6.43 $n \geq 1$ を自然数とする．$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とする．$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset D^n$ を一点につぶして得られる空間を X とする．X は S^n と同相であることを示せ．

A 6.44 X をコンパクトでない局所コンパクト空間とし，$f\colon X \to Y$ を一点コンパクト化とする．

1. $f(X)$ は Y で稠密であることを示せ．
2. X が連結なら，Y も連結であることを示せ．

A 6.45 1. $n \in \mathbb{N}$ に対し，$e_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset l^\infty$ を，第 n 成分が 1 でそれ以外は 0 という元とし，$C = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．$C \subset l^\infty$ は有界閉集合だが，コンパクトでないことを示せ．

2. l^∞ の単位閉球 $B = \{x \in l^\infty \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ はコンパクトでないことを示せ．
3. l^∞ は局所コンパクトでないことを示せ．

B 6.46 1. X を $\mathbb{R}$ の部分空間 $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ とする．開うめこみ $X\to[-1,1]$ で，$[-1,1]$ が X の一点コンパクト化となるものを与えよ．

2. Y を $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $\{-1,1\}\times\mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^2$ の部分空間 $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2=1\}$ への開うめこみ $Y\to V$ で，V が Y の一点コンパクト化となるものを与えよ．

3. Z を $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ の部分空間 $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y+1)^2=1\}$ への開うめこみ $Z\to W$ で，W が Z の一点コンパクト化となるものを与えよ．

B 6.47 1. $X=(0,1]\times\{0,1\dots,n-1\}$ から $\mathbb{R}^2$ へのうめこみ $f\colon X\to\mathbb{R}^2$ で，像の閉包 $\overline{f(X)}$ が X の一点コンパクト化となるものを与えよ．

2. $X=(0,1]\times\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}^2$ へのうめこみ $f\colon X\to\mathbb{R}^2$ で，像の閉包 $\overline{f(X)}$ が X の一点コンパクト化となるものを与えよ．

B 6.48 X を局所コンパクト空間とする．Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X\to Y$ を開うめこみとする．$g\colon X\to Z$ を一点コンパクト化とし，$c\in Z$ を無限遠点とする．写像 $p\colon Y\to Z$ を，$g=p\circ f$ と $p^{-1}(c)=Y\setminus f(X)$ をみたすただ 1 つの写像とする．p は連続であることを示せ．

C 6.49 X をハウスドルフ空間とする．X の部分空間 A について，次の条件を考える．

(1) A は局所コンパクトである．

(2) A は，A の閉包 $\overline{A}$ の開集合である．

1. X が局所コンパクト空間ならば，(2)⇒(1) がなりたつことを示せ．（ヒント: X のコンパクト化を使う．）

2. (1)⇒(2) がなりたつことを示せ．

第 7 章の問題

A 7.1 X と Y を有限集合とし，元の個数をそれぞれ m,n とする．Y^X も有限集合で，元の個数は n^m となることを示せ．

A 7.2 巾集合 $P(\mathbb{N})$ からそれ自身への写像 $f\colon P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ を，A が有限集合なら $f(A)=\mathrm{Card}\ A$, A が無限集合なら $f(A)=\mathbb{N}$ で定める．

1. $f(A)=f(B)$ は，全単射 $A\to B$ が存在することと同値であることを示せ．

2. 像 $f(P(\mathbb{N}))\subset P(\mathbb{N})$ は，$\mathbb{N}\cup\{\mathbb{N}\}$ であり，f が定める同値関係に関する完全代表系であることを示せ．

A 7.3 1. $\mathbb{N}^{2*}=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \mid m<n\}$，$F(\mathbb{N})=\{A\in P(\mathbb{N}) \mid A \text{ は有限集合}\}$ とする．$b\colon F(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ を 2 進表示が定める全単射とする．写像 $f_2\colon\mathbb{N}^{2*}\to F(\mathbb{N})$, $g_2\colon\mathbb{N}^{2*}\to\mathbb{N}^2$ を $f_2(m,n)=\{m,n\}, g_2(m,n)=(m,n-m-1)$ で定める．合成 $h_2=b\circ f_2\circ g_2^{-1}\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ の像を A とおき，写像 $C_A\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を，$C_A(0)=0$ と

$$C_A(m+1)=\begin{cases}C_A(m)+1 & m\in A \text{ のとき}\\ C_A(m) & m\notin A \text{ のとき}\end{cases}$$

で定める．合成写像 $C_A \circ h_2 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を求め，全単射であることを確かめよ．

2. $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ は有限集合 $\}$ とおく．写像 $g \colon \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$ を次のように定める．$g(0) = 0$ とする．$a = (a_n) \neq 0$ で，m が，$a_n \geq 1$ となる最大の自然数 n であるとき，$g(a) = 2^{a_0}(1 + 2^{a_1+1}(1 + \cdots (1 + 2^{a_{m-1}+1}(1 + 2^{a_m})) \cdots)$ と定める．g は全単射であることを示せ．

B 7.4 X と Y を可算集合とする．$F(X \times Y)$ と $\coprod_{A \in F(X)} \mathrm{Map}(A, Y)$ も可算集合であることを示せ．

BP 7.5 $^{\mathrm{AC}}$ $(X_i)_{i \in I}$ を集合族とする．I は可算であり，すべての $i \in I$ に対し X_i は可算であるとする．このとき，$\bigcup_{i \in I} X_i$ は可算であることを示せ．

A 7.6 $X = Y = \mathbb{N}$ とし, 単射 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = 2n,\ g(n) = n + 1$ で定める．このとき，ベルンシュタインの定理の証明中の X', X'', X_∞ を求め，全単射 $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を具体的に表わせ.

A 7.7 $\mathrm{Card}\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ を示せ．

B 7.8 1. $\mathrm{Card}\ \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Card}\ 2^{\mathbb{R}} > \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ を示せ．

2. $C(\mathbb{R})$ を連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体の集合とする．$\mathrm{Card}\ C(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}\ \mathbb{R}$ を示せ．

B 7.9 次の無限集合がそれぞれ可算かどうか判定し，その理由を与えよ．

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{$ 有理数列 $(a_n)\}$, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid a_n \neq 0$ となる n は有限個 $\}$.

B 7.10 全単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を 1 つ与えよ.

A 7.11 X を無限集合とする．単射 $f \colon Y \to X$ が存在するならば，単射 $X \amalg Y \to X,\ X \times Y \to X$ も存在することを示せ．

BP 7.12 ツォルンの補題から，選択公理を導け．

第 8 章の問題

A 8.1 $n > 0$ を自然数とし，U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．U の点 a は，U の集積点であることを示せ．

A 8.2 Y を位相空間とし，$a, b \in Y$ を相異なる点とする．$A = Y \setminus \{a, b\}$ とし，$\mathcal{O}_A$ を A の部分空間としての位相とする．a の任意の開近傍 U と b の任意の開近傍 V に対し $U \cap V \cap A \neq \emptyset$ であるとし，$X = A \amalg \{c\}$ の位相 $\mathcal{O}_X$ を，$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_A \cup \{(U \cap V \cap A) \cup \{c\} \mid U$ は a の開近傍，V は b の開近傍 $\}$ で定める．

c は A の集積点であり，$f \colon A \to Y$ を包含写像とすると，$x \in A$ が c に近づくとき $f(x)$ は a と b の両方に収束することを示せ．

BP 8.3 チコノフの定理から，選択公理を導け．

A 8.4 (x_n) を位相空間 X の点列とする．

1. (x_n) が $a \in X$ に収束するならば，(x_n) の任意の部分列は a に収束することを示せ．

2. X を距離空間とし，$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ とおく．$a \in X$ が A の集積点ならば，a に収束する (x_n) の部分列が存在することを示せ．

A 8.5 $X = [0,1]$ とし，$\| \ \|_1$ を $C([0,1])$ の L^1 ノルムとする．

1. $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を，$f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(x) = 0$ $(x \geq 1)$ をみたす連続関数とする．$C([0,1])$ の関数列 (f_n) を，$f_n(x) = f(nx)$ で定める．関数列 (f_n) は，定数関数 0 に単純収束することと，L^1 収束することを示せ．一様収束はしないことも示せ．

2. $C([0,1])$ の一様収束位相は，L^1 ノルムが定める位相より，真に細かいことを示せ．

3. $C([0,1])$ を単純収束位相により，位相空間と考える．値写像 $C([0,1]) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ は，積位相に関して連続でないことを示せ．

BP 8.6 $^{\mathrm{AC}}$ X を距離空間とし，Y を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ について，次の条件は同値であることを示せ．

(1) f は連続である．

(2) X の点列 (x_n) が $a \in X$ に収束するならば，Y の点列 $(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束する．

A 8.7 $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ を，$g(x) = 0$ $(x \leq 0)$, $g(x) = 1$ $(x \geq 1)$ をみたす連続関数とする．$C([0,1])$ の関数列 (g_n) を，$g_n(x) = g(n(x - \frac{1}{2}))$ で定める．

1. (g_n) は，L^1 ノルムに関してコーシー列だが，収束列ではないことを示せ．

2. (g_n) は，最大値ノルムに関してコーシー列ではないことを示せ．

AP 8.8 (X, d_X) と (Y, d_Y) が完備距離空間であるとする．$X \times Y$ も，$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$ で定まる距離 d について，完備距離空間であることを示せ．

B 8.9 集合 $X = \{\text{開区間 } (a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$ の距離 d を，

$$d(A,B) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} ((A \cup B \text{ の長さ}) - (A \cap B \text{ の長さ})) & A \cap B \neq \emptyset \text{ のとき} \\ ((A \text{ の長さ}) + (B \text{ の長さ})) & A \cap B = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．$f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to X$ を，対 (x,s) を開区間 $(x-s, x+s)$ にうつす写像とする．

1. $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．f は開うめこみであることを示せ．

2. 距離空間 (X,d) は完備であることを示せ．

B 8.10 X を空でない完備距離空間とする．X に孤立点がないならば，閉うめこみ $2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在することを示せ．

B 8.11 実数の完備性とアルキメデス性から，実数の連続性を導け．

B 8.12 $C([0,1])$ の一様収束位相について，次を示せ．

1. $A = \{f \in C([0,1]) \mid f([0,1]) \subset [0,1]\}$ はコンパクトでないことを示せ．

2. $B = \{f \in A \mid x, y \in [0,1] \text{ に対し } |f(x) - f(y)| \leq |x-y|\}$ はコンパクトであることを示せ．

B 8.13 V と W をノルム空間とし，$\| \ \|_V$ と $\| \ \|_W$ でそれぞれ V と W のノルムを表す．$F\colon V \to W$ を連続線形写像とし，$0 < r < 1$ を実数とする．

1. 任意の $g \in W$ に対し，$\|f\|_V \le \|g\|_W$ かつ $\|g - F(f)\|_W \le r\|g\|_W$ をみたす $f \in V$ が存在するとする．V が完備ならば，F は全射であることを示せ．

2. 1. で，さらに，$f \in V$ が $\|f\|_V \le (1-r)\|g\|_W$ をみたすようにとれるとする．このとき，任意の $g \in W$ に対し，$\|f\|_V \le \|g\|_W$ かつ $F(f) = g$ をみたす $f \in V$ が存在することを示せ．

C 8.14 位相空間 X について，次の条件を考える．

(1) X はコンパクトである．

(2) X は点列コンパクトである．

(3) X の離散閉部分集合は有限集合である．

(4) X が空であるかまたは，任意の連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に最大値がある．

1. (1)⇒(3) と (2)⇒(3)$^{\mathrm{AC}}$ を示せ．

2.$^{\mathrm{AC}}$ X がハウスドルフならば (3)⇒(4) であることを示せ．

3.$^{\mathrm{AC}}$ X が正規空間ならば，(4)⇒(3) であることを示せ（ヒント：ティーツェの拡張定理（問題 8.24）を使う）．

4.$^{\mathrm{AC}}$ X が距離空間ならば，条件 (1)–(4) はすべて同値であることを示せ．

5.$^{\mathrm{AC}}$ X を積空間 $[0,1]^{\mathbb{R}}$ とし，$A = \{f \in X \mid f^{-1}((0,1])$ は可算集合 $\}$ とおく．A は点列コンパクトだが，コンパクトでないことを示せ．

6.$^{\mathrm{AC}}$ U を，$X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ から定数関数 1 をのぞいて得られる開集合 $U = X \setminus \{1\}$ とする．U は局所コンパクトであり，(4) をみたすが，(3) をみたさず，したがって点列コンパクトではないことを示せ．

7.$^{\mathrm{AC}}$ 積空間 $[0,1]^{(2^{\mathbb{N}})}$ はコンパクトだが点列コンパクトではないことを示せ．

A 8.15 X を位相空間とし，$\mathcal{O}$ を X の位相とする．

1. X が第 2 可算ならば，Card $\mathcal{O} \le \aleph$ であることを示せ．
2. X がハウスドルフならば，Card $X \le$ Card $\mathcal{O}$ であることを示せ．

A 8.16 $^{\mathrm{AC}}$ X を可分な距離空間とする．

1. X の部分空間は可分であることを示せ．
2. X の離散部分集合は可算であることを示せ．

B 8.17 U を $\mathbb{R}$ の開集合とする．U は，可算個の開区間の無縁和であることを示せ．

B 8.18 $C([0,1])$ の部分集合 A を，次で定める．

$$A = \left\{ f \in C([0,1]) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ のグラフは有限個の線分の合併で，各線} \\ \text{分の端点の } x \text{ 座標，} y \text{ 座標はともに有理数} \end{array} \right\}$$

1. 集合 A は可算集合であることを示せ．
2. 一様収束位相に関して，A は $C([0,1])$ で稠密であることを示せ．

B 8.19 1. l^∞ の部分空間 $C = \{(a_n) \in l^\infty \mid (a_n)$ は収束する $\}$ は，閉部分空間であり，可分であることを示せ．

2. $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset l^\infty$ は離散部分空間であることを示せ．

3. l^∞ は可分でないことを示せ．

4. 包含写像 $l^\infty \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ はうめこみではないことを示せ．

B 8.20 X を局所コンパクト空間とする．

1. $\mathcal{U}$ を X の開集合系の基底とする．$\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} \mid U$ は相対コンパクト $\}$ とおくと，$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ も X の開集合系の基底であることを示せ．

2. Y を X の一点コンパクト化とし，$b \in Y$ を無限遠点とする．次の条件は同値であることを示せ．

(1) X は σ コンパクトである．

(2) b の開近傍の基本系で，可算集合であるものが存在する．

3. 次の条件は同値であることを示せ．

(1) X は第 2 可算である．

(2) X は可分かつ距離づけ可能である．

(3) X は σ コンパクトかつ距離づけ可能である．

(4) X は σ コンパクトであり，X の任意の点 x に対し，x の開近傍で第 2 可算であるものが存在する．

(5) X の一点コンパクト化は，第 2 可算である．

BP 8.21 I を可算集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を位相空間の族とする．任意の $i \in I$ に対し，X_i が距離づけ可能ならば，積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ も距離づけ可能であることを示せ．

C 8.22 1. X をコンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f\colon X \to Y$ を連続全射とする．X が第 2 可算なら，Y も第 2 可算であることを示せ．

2. ハウスドルフ空間 X に対し，次の条件は同値であることを示せ．

(1) X はコンパクトかつ距離づけ可能である．

(2) 連続全射 $2^{\mathbb{N}} \to X$ が存在する．

C 8.23 $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times 2 \mid (x,z) \neq (0,1)\}$ とおき，写像の族 $(j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X)_{b\in\mathbb{R}}$ を，

$$j_b(x,y) = \begin{cases} (x, xy+b, 1) & x \neq 0 \text{ のとき，} \\ (y, b, 0) & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．X を，$(j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X)_{b\in\mathbb{R}}$ による像位相により，位相空間と考える．$f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y,z) = (xz, y)$ で定める．

1. $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ．

2. $b \in \mathbb{R}$ ならば，$j_b\colon \mathbb{R}^2 \to X$ は開うめこみであることを示せ．$b \in \mathbb{R}$ に対し $U_b = j_b(\mathbb{R}^2)$ とおくと，$(U_b)_{b\in\mathbb{R}}$ は X の開被覆であることも示せ．

3. $A = \{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbb{Q}, x \neq 0\} \subset X$ は，稠密であることを示せ．

4. 部分空間 $B = \{(0,b,0) \mid b \in \mathbb{R}\} \subset X$ は，離散であることを示せ．

5. X はハウスドルフであることを示せ．

6. X は第 1 可算であることを示せ．

7. X は第 2 可算でないことを示せ.
8. X は局所コンパクトであることを示せ.
9. X は σ コンパクトでないことを示せ.
10. X は距離づけ可能でないことを示せ.

C 8.24 $^{\mathrm{AC}}$ **(ティーツェの拡張定理)** X を正規空間とし，A を閉部分集合とする.

1. 制限写像 $B(X) \to B(A)$ は全射であり，任意の $g \in B(A)$ に対し，$f|_A = g$ かつ $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ をみたす $f \in B(X)$ が存在することを示せ.（ヒント：ウリゾンの補題と問題 8.13 をつかう.）
2. 制限写像 $C(X) \to C(A)$ は全射であることを示せ.

C 8.25 $^{\mathrm{AC}}$ X を正規空間とする．次の条件は同値であることを示せ.

(1) X はコンパクトかつ距離づけ可能である.

(2) $B(X)$ は一様収束位相に関して，可分である.