No.

Date ·5·17

訂正

$$\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(t)}}{\mathrm{ord}}(f(x+\alpha)) = k\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{t}}{\mathrm{ord}\,x} + \mathrm{ord}\, a_{n-k}$$

piecewise linear 単調増加

$$f^{-1}(D(0,r)) = \bigcup_{\alpha} D(\alpha, \cancel{\varphi(r)}\ \psi(r))$$

$\psi(r)$　$\varphi(r)$の逆関数

- 正規化の補題のリジッド幾何での類似

$A = \mathcal{O}_K\langle X_1,\cdots,X_n\rangle/I$　$\mathcal{O}_K$上平坦 $\neq 0$

$\exists$　$\mathcal{O}_K\langle T_1,\cdots,T_d\rangle \to A$　単射，$A$は$\mathcal{O}_K\langle T_1,\cdots,T_d\rangle$上平坦

剰余体上のふつうの正規化の補題

$$\begin{array}{ccc} F[T_1,\cdots,T_d] & \longrightarrow & A/m_K A \quad \text{inj.} \\ \uparrow & & \uparrow \ \ \curvearrowleft F[T_1,\cdots,T_d] \text{加群として有限生成} \\ \mathcal{O}_K\langle T_1,\cdots,T_d\rangle & \longrightarrow & A \end{array}$$

$\otimes_{\mathcal{O}_K} F$

Fが上

(石崎かおるさんのレポート)

No.

Date

$\hat{P}' = \mathcal{O}_{K'}\langle \frac{S_1}{\pi^{r e \cdot r}}, \cdots, \frac{S_n}{\pi^{r e \cdot r}} \rangle \to \hat{Q}' = \hat{P}' \otimes_P Q$ の整閉包

$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[T_1, \cdots, T_n] / (f_1, \cdots, f_n)$

$G^{r+} = \{1\}$ とする. $K'$を十分大きくとれば finite étale.

$$\hat{P}'_{F'} = \hat{P}' \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} F' \longrightarrow \hat{Q}'_{F'}$$

$\hat{P}'_{F'} = F'[S_1', \cdots, S_n']$

$\operatorname{Spec} \hat{Q}'_{F'} \to \mathbb{A}^n_{F'}$ の連結成分$^*$

$\operatorname{Spec} \hat{P}'_{F'} = \mathbb{A}^n_{F'}$ 可換群スキーム.

可換群スキーム ($F'$上のアフィン)

($F'$上の) (可換環) $\longrightarrow$ (可換群) で表現可能なもの.

$$R \longmapsto R^n = \operatorname{Mor}_{F'}(F'[S_1', \cdots, S_n'], R)$$

リジッド幾何から代数幾何への移行の目的の1つ.

$*$ が可換群スキームの射

$f : \mathbb{A}^n_F \to \mathbb{A}^n_F$ $F$上の(可換群)スキームの射

$\mathbb{A}^n_F = \operatorname{Spec} F[S_1, \cdots, S_n]$

$$\operatorname{Mor}_{Sch/F}(\mathbb{A}^n_F, \mathbb{A}^n_F) \simeq \operatorname{Mor}_F(F[S_1, \cdots, S_n], F[S_1, \cdots, S_n]) \simeq (F[S_1, \cdots, S_n])^n$$

$f \in \operatorname{Mor}_{Sch/F}(\mathbb{A}^n_F, \mathbb{A}^n_F)$

No.

Date

$f=(f_1,\dots,f_n)$ が可換群スキームの射であるための条件は

$\mathrm{ch}\,F=p>0$

$f_1,\dots,f_n$ が $S_1,\dots,S_n, S_1^p,\dots,S_n^p, S_1^{p^2},\dots,S_n^{p^2},\dots$

の($F$係数の)1次結合. (レポート)

↪ $f$ が微分形式と結びつく.

Spec $\hat{P}'_{F'}$ が群構造をもつ必然性はどこにあるのか?

幾何的な場合 例 $K=k(T_2,\dots,T_d)((T_1))$ $k$ : char $=p>0$ 完全体 (代数閉体)

$$X=\mathbb{A}^d_k=\operatorname{Spec} k[T_1,\dots,T_d]$$
$$\xi=(T_1)\in D=(T_1)$$
$$\mathcal{O}_{X,\xi}=k[T_1,\dots,T_d]_{(T_1)}$$
$$K=\operatorname{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi})$$

$$P=X\times_k X=\operatorname{Spec}\left(k[T_1,\dots,T_d]\otimes_k k[T_1,\dots,T_d]\right)$$

$p_1 \coprod p_2$, $X$

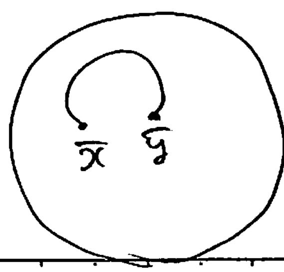
$a\otimes 1 \leftarrow a$, $1\otimes a \leftarrow a$, $k[T_1,\dots,T_d]$

$$(X\times_k X)\times_{p_2,X,p_1}(X\times_k X)=X\times_k X\times_k X\xrightarrow{pr_{13}}X\times_k X$$
$$(x,y,z)\mapsto(x,z)$$

$P\times_{p_1,X,p_2}P\to P$ groupoid の公理

blow-up して $(X\times X)^{(R)}$ を構成.

これが groupoid になる




$\pi_1(X,\bar{x},\bar{y}$

$\pi_1(X,\bar{x}$

No.

Date

スキームとは

局所環つき空間 $(X, \mathcal{O}_X)$

位相空間　可換環の層

$X$の各点$x$に対し，$\mathcal{O}_{X,x}$が局所環

$X \to Y$

______の射　各点で $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が局所準同形，

$$(\text{局所環つき空間}) \underset{\text{adjoint} = \mathrm{Spec}}{\overset{\text{global section}}{\rightleftarrows}} (\text{可換環})$$

$\mathrm{Mor}_{Sch}(X, \mathrm{Spec}\,R) \simeq \mathrm{Mor}_{Ring}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$

$\cup$

(スキーム)

の像＝アフィンスキーム

アフィンを含み，はりあわせとしてできている最小の部分圏

$k$：完全体　$X$：$k$上 smooth なスキーム　$d = \dim X$

$X$は局所的に $\mathbb{A}^d_k = \mathrm{Spec}\, k[T_1, \cdots, T_d]$ 上 étale

$D \subset X$ 単純正規交叉因子　$X$の閉部分スキーム

$X$は局所的に
$$\begin{array}{ccccc} X & \supset & U & \to & \mathbb{A}^d_k \\ \cup & & \cup & \square & \cup \\ D & \supset & D \cap U & \to & (T_1 \cdots T_n) \end{array}$$

$I_D \subset \mathcal{O}_X$ が $(T_1 \cdots T_n)$ で生成される．

$D$が既約　$\xi$ 生成点

$\mathcal{O}_{X,\xi}$ 離散付値環　$K = \mathrm{Frac}\,\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$

$L/K$ 有限次分離拡大とすると、

$\xi$ の étale 近傍 $X'$ で

$\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi} \to \hat{\mathcal{O}}_{X',\xi}$ は同形

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\supset"] & D' \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\ni"] & \xi \arrow[d, phantom, "\mathrm{I}"] \\
X \setminus D = U \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \arrow[r, phantom, "\supset"] & D \arrow[r, phantom, "\ni"] & \xi
\end{tikzcd}$$

$\xi$ 生成点

étale　　既約

$$\begin{tikzcd}
Y \setminus E = V \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\supset"] & E \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\ni"] & \eta \\
U' \arrow[r, hook] & X' \arrow[r, phantom, "\supset"] & D'
\end{tikzcd}$$

とすると

finite flat

$E$ : smooth な既約因子で $\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi'} \to \hat{\mathcal{O}}_{Y,\eta}$ がある.

と $\eta$ 生成点

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hat{\mathcal{O}}_{Y,\eta} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathcal{O}_K \arrow[r] & \mathcal{O}_L
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}^h_{X,\xi} = \lim_{\substack{X' \to X \\ \xi \text{の étale 近傍}}} \mathcal{O}_{X',\xi} \to \mathcal{O}_K$$

$\uparrow$

$\mathcal{O}_{X,\xi}$ の henselization の分数体 $K_0$

$$(K_0 \text{ 上の étale alg.}) \to (K \text{ 上の étale alg.})$$

$$L_0 \longmapsto L_0 \otimes_{K_0} K$$

は圏の同値 (レポート)

$X\times_k X$ を2回 blow-up　1. log blow-up (tame)
　　　　　　　　　　　　　2. wild blow-up

$D\subset X$　$D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ 単純正規交叉因子

$X\times_k X \supset D_i\times_k D_i$ $(i=1,\dots,n)$ をすべて blow-up

$\mathcal{O}_{X\times_k X}\supset \mathcal{I}_{D_i\times D_i}$　　$\mathcal{O}_{X\times X}\supset \prod_{i=1}^{n}\mathcal{I}_{D_i\times_k D_i}$ を blow-up.

blow-up … イデアル層を可逆層にする操作

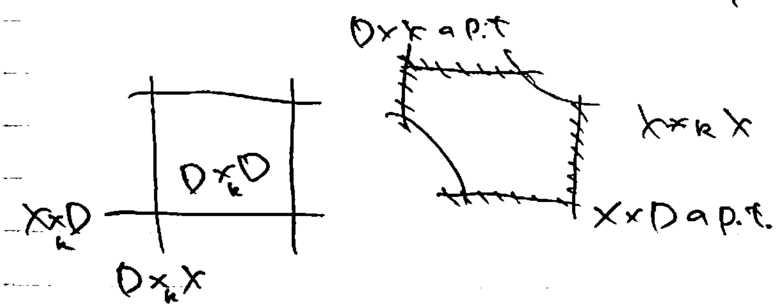
積イデアルが可逆層 $\Longleftrightarrow$ その各因子が可逆

$$X\times_k X \leftarrow (X\times_k X)' \underset{\text{open subsch.}}{\supset} X *_k X = (X\times_k X)^{\sim}$$

its complement

$\cup$

$D\times_k X,\ X\times_k D$ ⌒ — , — a proper transform




例1　$X=\mathbb{A}_k^d\supset D=(T_1,\dots,T_n)$

$$X\times_k X=\mathbb{A}_k^{2d}=\mathrm{Spec}\,k[\underbrace{S_1,\dots,S_d}_{\uparrow\, T_i\otimes 1},\underbrace{T_1,\dots,T_d}_{\uparrow\, 1\otimes T_i}]=A$$

$S_1,\dots,S_n$
$\downarrow$
$U_i T_i$

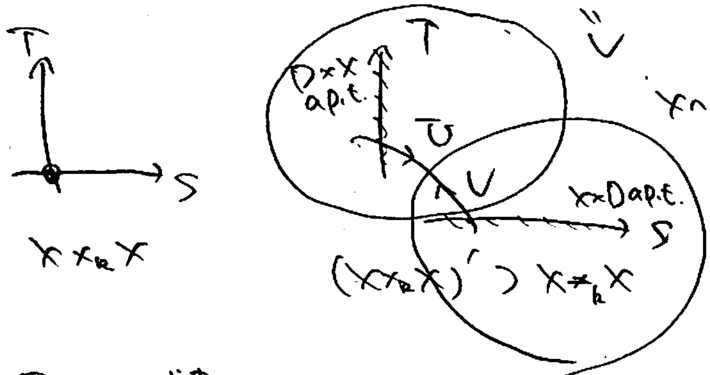
$$X *_k X=\mathrm{Spec}\,A\left[\left(\frac{S_1}{T_1}\right)^{\pm1},\dots,\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\pm1}\right]$$

$$=\mathrm{Spec}\,k[U_1^{\pm1},\dots,U_n^{\pm1},S_{n+1},\dots,S_d,T_1,\dots,T_d]$$

$n=d=1 \quad X=\mathbb{A}^1=\mathrm{Spec}\,k[T]\supset D=(T=0)$

$$X\times_k X=\mathbb{A}^2=\mathrm{Spec}\,k[S,T]\supset D\times D=(S,T)$$

$$(X\times_k X)'=\underbrace{\mathrm{Spec}\,k[S,\tfrac{T}{S}]}_{=V}\cup\underbrace{\mathrm{Spec}\,k[\tfrac{S}{T},T]}_{=U}$$




$X\cap(D_i\times_k D_i)$
$= D_i$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{diagonal}"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"', "\text{log diagonal}"] & X\times_k X \\ & X*_k X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

（レポート問題）

例1のつづき.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X\times_k X & (S_1-T_1,\cdots,S_d-T_d) \\ & X*_k X \arrow[u] & (U_1-1,\cdots,U_d-1,S_{n+1}-T_{n+1},\cdots,S_d-T_d) \end{tikzcd}$$

$S_i-T_i$
$=T_i(U_i-1)$
$(i=1,\cdots,n)$

conormal sheaf.

$$N_{X/X\times_k X}=I_X/I_X^2 \qquad I_X\subset \mathcal{O}_{X\times_k X}$$
$$\simeq \Omega^1_{X/k}$$

$$N_{X/X*_k X}=\Omega^1_{X/k}(\log D)$$

例

$X = \mathbb{A}^d_k \quad \Omega^1_{X/k} = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X \cdot dT_i$

$$\Omega^1_{X/k}(\log D) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X \overset{d\log T_i}{\overset{\shortparallel}{\frac{dT_i}{T_i}}} \oplus \bigoplus_{i=n+1}^{d} \mathcal{O}_X\, dT_i$$

$I_X = (S_1 - T_1, \cdots, S_d - T_d)$

$$I_X/I_X^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X\, \overline{(S_i - T_i)} = \overline{(T_i \otimes 1 - 1 \otimes T_i)} = dT_i$$

$$\overline{(U_i - 1)} = \frac{1}{T_i}\overline{(S_i - T_i)} = \frac{dT_i}{T_i} = d\log T_i \ (i = 1, \cdots, n)$$

$X \times_k X$ smooth$/k$ (例では表示から明らか.
一般の場合も例に帰着できる)

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{smooth}}{X} & \longrightarrow & \overset{\text{smooth}}{X \times_k X} \\ d & & 2d \end{array}$$

なのでこの immersion は正則うめこみで
$N_{X/X\times_k X}$ は局所有限生成自由で,
階数 $2d - d = d$

よって生成系 $d\log T_1, \cdots, d\log T_n,$
$d\log T_{n+1}, \cdots, d\log T_d$ は
基底

(上つき)分岐群 $r \geq 0,\ r \in \mathbb{Q}$

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i D_i \quad r_i \geq 0,\ r_i \in \mathbb{Q}$$

この講義では話を簡単にするために $r_i \in \mathbb{N}\,(>0)$
の場合に限る.

No.

Date

$R \subset X$ Cartier 因子と考えることができる.

$$
\begin{array}{l}
X \\
\quad \Big\downarrow \text{ log diag.} \quad \text{開部分スキーム} \\
X \ast_R X \quad \text{log product という.} \\
\quad \| \\
P \quad P \text{ を } R \text{ で blow-up.} \cdots \text{ wild blow-up.}
\end{array}
$$