

2009-10-19

## Weil - Deligne 群の表現

$$\mathbb{Q}_p \quad \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) = G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow G_{\mathbb{F}_p} \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\cup \quad \cup$$

$$I_p \subset W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \langle \text{Frp} \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

$\nearrow$  逆像として def  
 Weil 群

$W_{\mathbb{Q}_p}$  の位相  $I_p$  は open compact subgroup.

$$\text{WD}_{\mathbb{Q}_p} = \text{ } \left\{ \begin{array}{l} W_{\mathbb{Q}_p} \text{ の表現} \\ \rho' = (\rho, N) \text{ pair} \end{array} \right.$$

$\rho: W_{\mathbb{Q}_p}$  の表現

$\text{Ker } \rho \cap I_p \subset I_p$  の開部分群

$N$  (nilp) 準同型

$$\rho(\sigma) N \rho(\sigma)^{-1} = p^{n(\sigma)} N$$

$$n: W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Z}$$

monodromy theorem

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL(V) \quad \text{連続 } \ell \text{ 進表現}$$

とすると  $(\rho', N)$   $WD_{\mathbb{Q}_p}$  の表現で

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \sigma \in I \text{ に対し}$$

$$\rho(F^n \sigma) = \rho'(F^n \sigma) \exp(t_\ell(\sigma)N)$$

と与えられるものか定まる。

$$\left( t_\ell : I_p \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}_\ell \right)$$

strong compatibility

$p = \ell$  のときは除く。

$p$  進 Hodge theory

$E$  : 代数体

$$\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_{E_\lambda}(V_\lambda) \quad \lambda : E \text{ の有限素点}$$

↑  
 $\ell$  進表現の系

各  $p, \lambda$   $\lambda \neq p$  で  $WD$  の表現

$$\left( \rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}}, N \right) \text{ が定まる.}$$

$W_{\mathbb{Q}_p}$  の rep



$(\rho_\lambda)$  が  $H^*(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$   $\left( X: \text{proper smooth} / \mathbb{Q} \right)$

のとき  $\rho_\lambda |_{G_{\mathbb{Q}_p}}$  は半単純?

(Tate予想の帰結)

- $= 0, 1$  の場合は OK  $= 1$  (Faltings)

strong compatibility を示すには.

- trace の等式

good reduction のときは

Weil 予想の帰結. (前回)

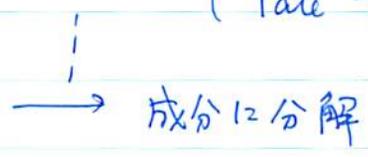
一般のとき.

weight spectral sequence の functoriality を示す.

Kunneth 分解 が代数的.

(Tate 予想の一部)

Trace の交代和



$\dim \leq 2$ , modular form (= と同じ) Galois 表現.

(elliptic or Hilbert)

•  $N$  の比較

good red  $\Rightarrow N=0$  なので OK

一般のとき

weight monodromy 予想 が  
示せれば  $\rho'$  の方から従う

$H^2 \neq 0$ , modular form のときは OK.

weight monodromy 予想

局所体の話

$X$   $\mathbb{Q}_p$  上 proper smooth alg var

$$G_{\mathbb{Q}_p} \curvearrowright H^l(X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}, \mathbb{Q}_l) =: V$$

$$l \neq p$$

monodromy thm (2.5.4)

$\exists$  nilp  $N$  が定まる

$N$  から  $V$  の monodromy filtration が定まる

$$N^{n+1} = 0 \text{ とする}$$

Jordan 標準形

$V$  の増大 filt.  $W_\bullet V$

$$W_n V = V \qquad U_{-n} V = 0$$

$N(W_i V) \subset W_{i-2} V$  かつ

$$N^k : Gr_k^W V = W_k V / W_{k-1} V \longrightarrow Gr_{-k}^W V$$

$k \geq 0$

加同型

かつ  $T=1$  だけ定まる.

例  $n=1$

$$V \supset \text{Ker } N \supset \text{Im } N \supset 0$$

$$W_1 \quad W_0 \quad W_{-1} \quad W_{-2}$$

$V = H^g$  のとき  $Gr_i^W V$   $G_K$  の表現  $K = \mathbb{Q}_p$

$\psi$

$F \curvearrowright Gr_i^W V$  の固有値  $F$   $Fr$  の持ち上げ

Weil 予想の帰結として 整  
 固有値は代数的数  
 複素数としての絶対値は  $p^{\frac{g+i}{2}}$

weight monodromy 予想

$\downarrow$

整数  $= g+i$

$\rightsquigarrow$   $\rho'$  から filtration  $W$  を決める

$\rightsquigarrow$   $N$  の同型類も決める.

## 2. modular form と Galois 表現

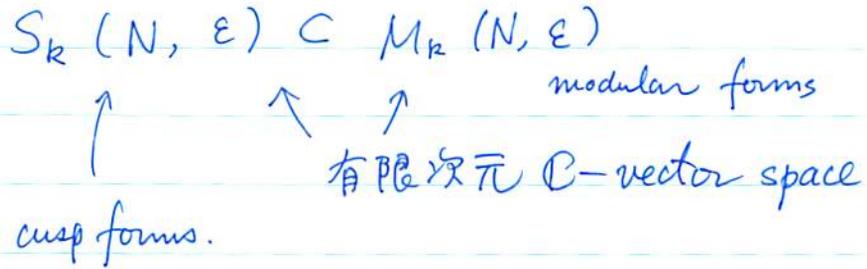
- modular form の定義
- Hecke operator
- modular form にともなう Galois 表現  
(normalized eigen cusp form)
- 構成
- $GL_2(\text{adele})$  の表現
- 局所 Langlands 対応との compatibility

ref. IHES summer school 報告集用の原稿.

2.1 modular forms の定義

$N \geq 1$   $N \mid N$   $k \geq 2$  重さ

$\epsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  指標

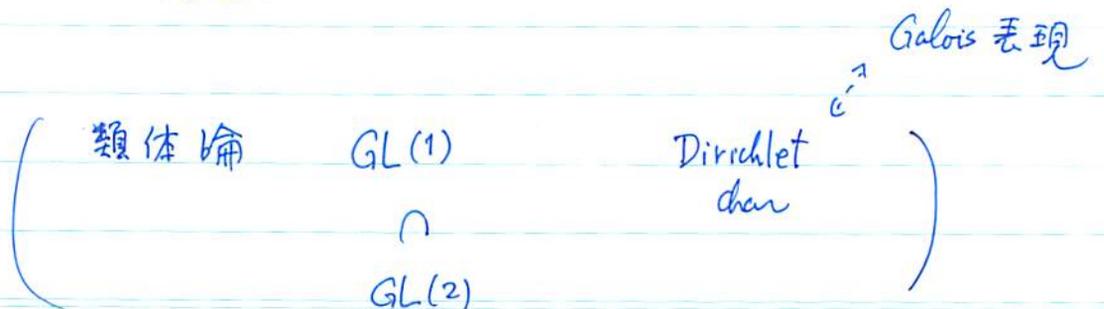


$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$  合同部分群

$\exists N : \Gamma(N) \subset \Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$   
 $\parallel$   
 $\ker(SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N))$

$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   $\parallel$   
 $d \equiv 1 (N)$   $c \equiv 0 (N)$   $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

$\Gamma_0(N) / \Gamma_1(N) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$   
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto d \pmod N$



$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \quad \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$f : H \rightarrow \mathbb{C}$  正則関数

$$(\gamma_k^* f)(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^k} f(\gamma\tau)$$

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H \times \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ (\tau, z) \mapsto \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d} \right) \end{array}$$

$$f(\tau) dz^{\otimes k}$$

$$\gamma^* (f(\tau) dz^{\otimes k}) = (\gamma_k^* f)(\tau) dz^{\otimes k}$$

$\omega : H$  上の complex line bundle  $dz$  : 基底

$$\Gamma(H, \omega^{\otimes k}) = \Gamma(H, \mathcal{O}_H)(dz)^{\otimes k} \wedge \text{の作用}$$

$S_k(\Gamma)$ ,  $M_k(\Gamma)$  $(\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N))$ 

正則関数  $f: H \rightarrow \mathbb{C}$  が level  $\Gamma$  重た長  
の modular form (resp cusp form) であるとは

(1)  $\forall \gamma \in \Gamma \quad \forall \tau \in H$  に対し.

$$\gamma_k^* f = f$$

(2)  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対し  $f(\tau+1) = f(\tau)$ .

$$\text{よって } f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

と書ける.

$$\text{このとき } n < 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$(\text{resp } n \leq 0 \Rightarrow a_n = 0)$$

さらに, 2の条件が任意の  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$

に対し,  $\gamma_k^* f$  についても成立する

( $\Gamma$  でなく)

有限個  $\#(SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma)$   
の条件.



## 2.2 Hecke 作用素

$f$ : level  $N$  重正長 指標  $\varepsilon$  の cusp form

$T_n \subset S_k(N, \varepsilon)$  Hecke operators

$n=1, 2, 3, \dots$

$n=p$  が素数 のとき

$$T_p f(\tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+i}{p}\right) + \begin{cases} p^{k-1} \varepsilon(p) f(p\tau) \\ 0 \end{cases}$$

$T_p$  は互いに可換

$p \nmid N$   
 $p \mid N$

$= n$  のとき  $T_p = U_p$   
 とおく。

形式的に展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s} = \prod_{p: \text{素数}} (1 - T_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1} p^{-2s})^{-1}$$

$\left( \begin{array}{l} \varepsilon(p) = 0 \text{ とおく} \\ p \mid N \text{ のとき} \end{array} \right)$

$f \in S_k(N, \varepsilon)$  が normalized eigen cusp form

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) g^n \text{ とおくと } a_1(f) = 1 \text{ であり,}$$

$\forall n \geq 2$  の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $T_n$  の固有ベクトル

$$T_1(N, k, \varepsilon) = \mathbb{C}[T_n : n=1, 2, \dots] \subset \text{End}(S_k(N, \varepsilon))$$

↑  
Hecke環

↑  
ℂ上の有限次元可換環.

$T_1(N)$  と略記

pairing

$$T_1(N) \times S_k(N, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{bilinear form}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (T & , & f) \longmapsto a_1(Tf) \\ & & \downarrow \\ & & \text{f展開の初項} \end{array}$$

g-expansion principle. ↑ = hが非退化.

$$a_1(T_n f) = a_n(f) \quad \text{なので}$$

$$a_1(T_n f) = 0 \quad (\forall n) \Rightarrow f = 0$$

右側はついで非退化.

(左側.  $T_1(N)$  がその end であることから).

$$\rightsquigarrow S_k(N, \varepsilon) = \text{Hom}(T_1(N), \mathbb{C}) \quad \text{同一視.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{normalized} \\ \text{eigenforms} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \mathbb{C} \text{ 上の環の準同型} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$f = \sum a_n g^n \quad \xleftrightarrow{1:1} \quad (T_n \mapsto a_n)$$

Hecke

operator の固有値

 $T_1(N)$  の半単純化

$T_n f = a_n f$

$\hookrightarrow$   $H$  上の hol func というのは  
 世を忍ぶ級の姿.

$f$ : normalized eigenform

$$\rightsquigarrow E := \mathbb{Q}(f) \subset \mathbb{C}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{Q}(a_n(f); n=1, 2, \dots)$$

$$\uparrow$$

実は  $\mathbb{Q}$  の有限次拡大

Def

 $\lambda$  :  $E$  の有限素点 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(E_{\lambda})$   $l$  進表現か  $f$  にともなう Galois 表現であるとはほとんどの素点  $p$  で 不分割で,

$$\text{Tr } \rho(\text{Fr}_p) = a_p(f)$$

か 成り立つ.

 $f$ : level  $N$   $\lambda | l$  とすると 指標  $\varepsilon$  weight  $k$ ほとんどの  $p \nmid Nl$  で 不分割

$$\det(1 - \rho(\text{Fr}_p)t) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)p^{k-1}t^2$$

と 言 っ て 可 成 り

$$= (1 - \alpha t)(1 - \beta t)$$

Ramanujan conj

 $\alpha, \beta$  の 複素数としての  
絶対値 は  $p^{(k-1)/2}$ Weil 表現 +  $f$  にともなう Galois 表現の幾何的構成  
の帰結. (次回)

$$\text{Ramanujan conj} \Rightarrow L(f, s) = \sum a_n n^{-s}$$

$$\text{加} \quad \text{Re } s > \frac{k-1}{2} + 1$$

2. 绝对收敛.