2025 年度 数理科学概論 期末試験問題　文科

7 月 17 日（木）1 限 8:40-10:10 (90 分)　斎藤 毅

・氏名と学生証番号を必ず記入してください.
・解答用紙と計算用紙各 1 枚.
・筆記用具と計時機能のみの時計以外もちこめません.
・解答には，途中の計算などもくわしく書いてください.

問題１　2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = 2x^2y + xy^2 - 6xy$$

で定める.

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.
2. グラフ $z = f(x,y)$ の点 $(2,1,f(2,1))$ での接平面を求めよ.
3. $f(x,y)$ が極値をとるための必要条件をみたす点を求めよ.
4. 2 階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ.
5. $f(x,y)$ が極値をとる点と峠点となる点をすべて求めよ.

問題２　2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ と関数 $p(t), q(t), k(t)$ を

$$f(x,y) = x^3 + 3y^3,\ g(x,y) = x^2 + 3y^2,$$

$$p(t) = \sqrt{3}\cos t, \quad q(t) = \sin t, \quad k(t) = f(p(t), q(t))$$

で定める．角は弧度法で考える.

1. 勾配ベクトル $\operatorname{grad} f(2,1)$ を求めよ.
2. ラグランジュの未定係数法を適用して，条件 $g(x,y) = 3$ のもとで関数 $f(x,y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.
3. $(x,y) = (p(t), q(t))$ が方程式 $g(x,y) = 3$ で定まる曲線のパラメータ表示であることを確かめよ.
4. 導関数 $k'(t)$ を求めよ.
5. $k(t)$ の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲での増減を調べよ.
6. $k(t)$ の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲での最大値と最小値を求めよ.

問題３　$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$ とする．積分

$$\int_D x^2y\ dxdy$$

を求めよ.

問題４　導関数 $\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\right)'$ を求めよ.

1　1. $f_x(x,y)=4xy+y^2-6y, \qquad f_y(x,y)=2x^2+2xy-6x.$

2. $f_x(2,1)=3,\ f_y(2,1)=0.\ f(2,1)=-2$ だから，接平面は
$z=3(x-2)+0(y-1)-2=3x-8$.

3. $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ より $y(4x+y-6)=2x(x+y-3)=0$ だから，
極値をとりうる点は $(x,y)=(0,0),\ (3,0),\ (0,6),\ (1,2)$.

4. $f_{xx}(x,y)=4y, \quad f_{xy}(x,y)=4x+2y-6, \quad f_{yy}(x,y)=2x.$

5. $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=0\cdot 0-(-6)^2<0$ だから $(0,0)$ は峠点.
$f_{xx}(3,0)f_{yy}(3,0)-f_{xy}(3,0)^2=0\cdot 6-6^2<0$ だから $(3,0)$ も峠点.
$f_{xx}(0,6)f_{yy}(0,6)-f_{xy}(0,6)^2=24\cdot 0-6^2<0$ だから $(0,6)$ も峠点.
$f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2)-f_{xy}(1,2)^2=8\cdot 2-2^2>0$ だから
$(x,y)=(1,2)$ で $f(x,y)$ は極小値 -4 をとる.

2　1. $f_x(2,1)=12,\ f_y(2,1)=9$ だから $\operatorname{grad} f(2,1)=\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}$.

2. $f_x(x,y)=3x^2,\ f_y(x,y)=9y^2,\ g_x(x,y)=2x,\ g_y(x,y)=6y$ だから，
ラグランジュの未定係数法より，条件つき極値をとりうる点は $x^2y=xy^2$ つまり
$x=0$ または $y=0$ または $x=y$ をみたす．$g(x,y)=3$ だから，
$x=0$ のとき $y=\pm1$, $\qquad y=0$ のとき $x=\pm\sqrt{3}$, $\qquad x=y$ のとき $x=y=\pm\sqrt{3}/2$.
よって求める点は $(0,\pm1),\ (\pm\sqrt{3},0),\ (\pm\sqrt{3}/2,\pm\sqrt{3}/2)$ 複号同順の 6 点.

3. $x=\sqrt{3}s$ とおくと $x^2+3y^2=3$ は $s^2+y^2=1$ と同値である.
したがって曲線 $x^2+3y^2=3$ は円 $x^2+y^2=1$ を x 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍拡大したものである.
$(\cos t,\sin t)$ は円 $x^2+y^2=1$ のパラメータ表示だから，
$(p(t),q(t))=(\sqrt{3}\cos t,\sin t)$ は曲線 $x^2+3y^2=3$ のパラメータ表示である.

4. $k(t)=3\sqrt{3}\cos^3 t+3\sin^3 t$ だから，
$k'(t)=-3\sqrt{3}\cdot 3\cos^2 t\sin t+3\cdot 3\sin^2 t\cos t=9\sin t\cos t(\sin t-\sqrt{3}\cos t)$.

5. $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で $k'(t)=0$ をみたす t は $t=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$.

0　減少　$\dfrac{\pi}{3}$　増加　$\dfrac{\pi}{2}$　減少　π　増加　$\dfrac{4\pi}{3}$　減少　$\dfrac{3\pi}{2}$　増加　2π.

6. $k(0)=3\sqrt{3},\ k(\dfrac{\pi}{3})=3\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{8}+3\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ k(\dfrac{\pi}{2})=3$ だから，
最大値は $k(0)=3\sqrt{3}$, 最小値は $k(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

3　$$\int_D x^2y\,dxdy=\int_0^1\left(x^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\,dy\right)dx=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big)=\frac{1}{15}.$$

4　$y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ とおく．両辺を 2 乗すれば $y^2=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, 移項して $(x^2+1)y^2=x^2-1$.
両辺を微分すると $(x^2+1)2yy'+2xy^2=2x$ だから $y'=\dfrac{x(1-y^2)}{(x^2+1)y}$.
$1-y^2=1-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{2}{x^2+1}$ だから $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\dfrac{2x}{x^2+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^4-1}}$.
別解：$y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$