1/27 Integrality.

$$\mathrm{Sw}\mathcal{F} \overset{?}{\in} \mathrm{Im}(CH_0(X \setminus U) \to CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}).$$

Hasse-Arf の定理．$\dim X \leq 2$ なら正しい．

階数 1 の場合への帰着．

Brauer の定理．G を有限群，V を G の表現とすると，$[V] = \sum_i n_i[\mathrm{Ind}_{H_i}^G \chi_i]$ と書ける．

induction formula.

$$\mathrm{Sw}(f_*\mathcal{F}) = f_*\left(\mathrm{Sw}\mathcal{F} - \mathrm{rank}\mathcal{F} \cdot (-1)^d c^{\,Y}_{d D_Y}(f^*\Omega^1_{X/F}(\log D_X) \to \Omega^1_{Y/F}(\log D_Y))\right)$$

これらにより，階数 1 の場合に帰着される．

孤立固定点．

A　正則局所環．G　有限群，A に作用．

仮定：$\sigma \neq 1$ なら，剰余環 $A_\sigma = A/\langle \sigma(a) - a : a \in A\rangle$ は長さ有限．

$$a_G(\sigma) = \begin{cases} -\mathrm{length} A_\sigma & \sigma \neq 1 \\ -\sum_{\sigma \neq 1} a_G(\sigma) & \sigma = 1. \end{cases}$$

予想 (Serre)　a_G は G の指標．

いいかえ：

$$\mathrm{sw}_G(\sigma) = \begin{cases} a_G(\sigma) + 1 & \sigma \neq 1 \\ a_G(1) - (|G| - 1) & \sigma = 1 \end{cases}$$

とおくと，G の任意の表現 V に対し，

$$\mathrm{Sw}V = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} \mathrm{sw}_G(\sigma) \cdot \mathrm{Tr}(\sigma : V) \in \mathbb{Z}.$$

$A^G = O_{X,x}$ のときは，$\mathrm{Sw}V = \mathrm{Sw}\mathcal{F}_V \in CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Integrality の帰結．A が等標数で，$\dim A \leq 2$ なら OK．

1 次元の場合．

i) 分岐群。

L/K　完備離散付値体の有限次 Galois 拡大。$G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

$G_i = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Aut}(O_L/m_L^i)$. $G = G_0, G_1 = I, G_2 = P$. I/P は位数が p と素な巡回群．P は p 群．

幾何的解釈：L が完全分岐とし，$\alpha = \pi_L$ を L の素元とする．単射 $G \to \bar{K} : \sigma \mapsto \sigma(\alpha)$ により，$G \subset \bar{L} = \bar{K}$ と同一視する．$G_i = G \cap D(\alpha, i)$ である．

$f(x)$ を α の最小多項式とする．$O_L = O_K[x]/(f(x))$. $G = \{x \in \bar{K} | f(x) = 0\}$.

上付き分岐群．

$$G^j = G \cap (\{x \in \bar{K} | \mathrm{ord}\ f(x) \geq j\} \text{ の } \alpha \text{ を含む disk}).$$

ii) Herbrand 関数.

L/K　完備離散付値体の完全分岐拡大. $O_L = O_K[x]/(f(x))$.

$h(x) = f(x+\alpha) = f(x+\alpha) - f(\alpha)$ とおく.

Herbrand 関数：$\varphi(u) = \mathrm{ord} h(\pi^u x)$

命題：1. 区分的に線型、下に凸、単調増加。

2. $G^{\varphi(u)} = G_u$.

単調増加は明らか.

Newton 多角形. 一般に, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$ に対し, $\ell_g(t)$ は, 区分的に線型、下に凸な $0 \le t \le n$ の関数で, $\ell_g(i) \le \mathrm{ord} b_i$ をみたすもののうち最大のもの.

Newton 多角形と Herbrand 多項式の関係：

$\varphi_h(u) = \min_{0\le t\le n} \ell_{h(\pi^u x)} = \min_{0\le t\le n} \ell_h + u(n-t)$

h の Newton 多角形と, $(n,0)$ をとおる傾き u の線分の「距離」$\|\ \|_\infty$

これより, φ は区分的に線型、下に凸

Newton 多角形と根の付値の関係：$g(x) = x^n + \sum_{i=1}^n b_i x^{n-i} \prod_i (x-\beta_i)$ のとき. $\mathrm{ord}\beta_i$ が増加関数になるようにとると, $\mathrm{ord} b_i \ge \mathrm{ord}\beta_1 + \cdots \mathrm{ord}\beta_i$ で, $\mathrm{ord}\beta_i < \mathrm{ord}\beta_{i+1}$ なら等号.

2. $G^{\varphi(u)} = G_u$ の証明.

Newton 多角形の頂点. $G_i \supsetneqq G_{i+1}$ のとき, $t = n - \sharp G_i$ は頂点で, その点の右側の傾きが i.

このとき, $u = i$ は Herbrand 関数のグラフの頂点で, その点の左側での傾きは, $\sharp G_i$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sw}(V) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\ne 1} \mathrm{sw}(\sigma)(\mathrm{Tr}(\sigma : V) - \dim V) \\
&= -\sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\ne 1, \sigma\in G_i} (\mathrm{Tr}(\sigma : V) - \dim V) \\
&= \sum_i \frac{|G_i|}{|G|}(\dim V - \dim V^{G_i}).
\end{aligned}
$$

V が既約なら, $V^{G_i} = V$ か 0. したがって, $= \dim V \sum_{i\le N} \frac{|G_i|}{|G|}$. break $\sum_{i\le N} \frac{|G_i|}{|G|}$ は $V^{G^j} = 0$ となる最大の j.

Hasse-Arf のいいかえ：G が Abel 群なら, G^j の jump は整数.

K の標数が p のとき, Artin-Schreier-Witt 拡大. Artin-Schreier のとき：$K/\wp K$ のフィルトレイション.