問題 1 X を位相空間とし，A, B を集合とする．$A_X, B_X, \mathrm{Map}(A,B)_X$ で X 上の定数層を表す．

1. 写像
$$F\colon \Gamma(X, \mathrm{Map}(A,B)_X) \to \mathrm{Mor}_{X上の前層}(A_X, B_X)$$
が，局所定数関数 $f\colon X \to \mathrm{Map}(A,B)$ を X の開集合 U に対し局所定数関数 $a\colon U \to A$ を $b(x) = (f(x))(a(x))$ で定まる局所定数関数 $b\colon U \to B$ にうつすことで定まることを示せ．

2. A が有限集合ならば 1 の写像 F は可逆であることを示せ．

3. X を離散空間 $\{0,1\}$ の無限積空間 $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ とし，$A = \mathbf{N}, B = \{0,1\}$ とする．X の開集合 U に対し局所定数関数 $a\colon U \to \mathbf{N}$ を $a^{-1}(n) \subset U$ 上では第 n 射影 $p_n\colon \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \{0,1\}$ の制限として定まる関数 $b\colon U \to \{0,1\}$ にうつすことで定まる前層の射 $A_X \to B_X$ は 1 の写像 F の像に含まれないことを示せ．

問題 2 X を $\mathbf{R}^2$ の開集合 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ とする．A を集合とし，A_X で定数層を表す．

1. $U_r(x) \subset X$ ならば，制限写像 $\Gamma(X, A_X) \to \Gamma(U_r(x), A_X)$ は可逆であることを示せ．

2. 連続写像 $f\colon X \to X$ を $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ で定める．$A = \{0,1\}$ とする．$U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\} \subset X$ とする．$\Gamma(U, f_*A_X)$ を求めよ．f_*A_X は定数層でないことを示せ．f_*A_X の U への制限は定数層であることを示せ．

問題 3 連続写像 $f\colon \mathbf{R} \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定める．

1. S^1 の恒等写像 1_{S^1} は写像 $f_*\colon C(S^1, \mathbf{R}) \to C(S^1, S^1)$ の像に含まれないことを示せ．