定理 (Beilinson) 特性サイクルは正係数

証明 $C=\bigcup C_a$ とする Milnor公式より、各 C_a の smooth pt (u,ω)

に対し、$f: X \to \mathbb{A}^1$ で u で孤立特異点、$df(u)=\omega$, $(C_a, df)_u = 1$

をみたすものを構成すればよい。u での局所座標 (x_i) をとり $\omega = \sum a_i dx_i$

とする $f=\sum a_i x_i$ とすれば $df(u)=\omega$ はみたされる。これを $(C_a, df)_u=1$ を
みたすように修正する

W を接空間 $T_{(u,\omega)}(T^*X)$, V を $df_*: T_u X \to T_{(u,\omega)}(T^*X) = W$ の像
$V^\vee$ を $T_{(u,\omega)}(T^*_u X) \subset W$ と同一視する
$df = \sum \partial_i f \cdot dx_i$ だから
$df_*: \partial_i \mapsto \sum \partial_i\partial_j f \cdot \partial p_j$ は Hessian H_f が定める
線形写像のグラフ
T を C_a の (u,ω) での接空間とする。f を修正して $V\cap T = 0$ としたい

補題1. V 有限次元線形空間 $W = V\oplus V^\vee$, $T\subset W$ $\dim T = \dim W$
$V_1 = V\cap T$ とおく。次の条件をみたす直和分解 $V = V_1\oplus V_2$ が存在する
任意の非退化双線形形式 $A: V_1 \to V_1^\vee$ に対し $V' = (A\text{のグラフ})\oplus V_2 \subset W$
とおくと、$V'\cap T = 0$ (かつ $V'\cap V^\vee = 0$) である

補題2. $\dim V$ even または $p\neq 2$ ならば $A = B + B^\vee$ が非退化となる
双線形形式 $B: V\to V^\vee$ が存在する

$B=(b_{ij})$ とし f を $f+\sum b_{ij}x_i x_j$ でおきかえれば
H_f は $H_f + (B+B^t)$ でおきかえられる。

補題1の証明 $T\to W\to W/V = V^\vee$ の像を $\bar T$ とし、その零化空間を $\bar T^\vee \subset V$ とおく
$\dim T = \dim V$ だから $\dim V_1 = \dim V\cap T = \dim \bar T^\vee$ である。よって直和分解
$V = V_1\oplus V_2$ で $V_2\cap \bar T^\vee = 0$ をみたすものがある $V_2\cap\bar T^\vee = 0$ より $V_1^\vee \oplus \bar T = V^\vee$ である
Aが同型だから $V' + T \supset V_1\oplus V_1^\vee \oplus V_2$, $V_1^\vee\oplus\bar T = V^\vee$ より $V'+T = W$.
$\dim V' = \dim V = \dim T$ より $V'\cap T = 0$.

$\mathcal{F}$-横断性

- $f: X \to Y$ C-trans. $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ loc. acy rel. to $\mathcal{F}$
- $h: W \to X$ 〃 $\Rightarrow$ 〃

定義 $\mathcal{F}$ on X const. $h: W \to X$ が $\mathcal{F}$-transversal とは
標準射 $h^*\mathcal{F} \otimes Rh^!\Lambda \to Rh^!\mathcal{F}$ が同形

例. 1. h smooth $\Rightarrow$ h は $\mathcal{F}$-trans. Poincaré duality
2. $\mathcal{F}$ l.c. $\Rightarrow$ $^\forall h$ は $\mathcal{F}$-trans.

perversity. $\mathcal{F}$ perverse, W, X smooth なら $h^*\mathcal{F}[\dim W - \dim X]$ shifted perverse

定理 $C \subset T^*X$ closed conical に対し、次は同値 Λ 係. 有限
(1) $C \supset SS\mathcal{F}$
(2) $^\forall h: W \to X$ に対し h C-trans $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-trans.

(1)$\Rightarrow$(2) $W \to W \times X \to X$ h imm

$$\begin{array}{ccccc} W & \to & X & \leftarrow & U \\ \downarrow & \square & \downarrow f & & \downarrow \\ 0 & \to & Y & \leftarrow & V \end{array}$$

C-trans $\mathcal{F}$ loc. acy. f smooth

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \otimes f^* Rj_*\Lambda \to Rj_*j^*\mathcal{F}$ isom App.

$\underset{Rj_*\Lambda}{\shortparallel}$ ← sm loc acy

$\mathcal{F} \otimes Ri^!\Lambda \to Ri^!\mathcal{F}$.

(2)$\Rightarrow$(1)

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow f \text{ smooth} & & \\ y & \to & Y & \leftarrow & \eta \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y' \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

$\psi_y\mathcal{F} = \varinjlim i'^* Rj'_* j'^*\mathcal{F}$

$\uparrow$ $\uparrow \wr$

$i^*\mathcal{F} \otimes \psi_y\Lambda = \varinjlim i'^*\mathcal{F} \otimes Rj'_* j'^*\Lambda$

$\underset{\Lambda}{\shortparallel}$ ← sm loc. acy. $\mathcal{F}$-t.d.f.

系 $h: W \to X$ properly C-trans $\Rightarrow$ $SS h^*\mathcal{F} = h^\circ SS\mathcal{F}$.
C Λ 係 $\mathcal{F}$ perverse. $\Rightarrow$ $h^*\mathcal{F}[\ ]$ perv. $CC \Rightarrow SS$.