4.4 Milnor公式の一般化

定義4.1. $f: X \to Y$ を smooth に有限型. K const on $X \times_Y Y$

$C \subset T^*Y$

1. K が C に弱超局所台をもつとは

$\forall Y \xleftarrow{} V \xrightarrow{g} Z$ 組に対し. C-transversalなる

étale curve

$\tilde{g}: X_V \times_V V \to X_V \times_Z Z$ が loc. acyclic rel to $K|_{X_V \times_V V}$

2. $C = \bigcup C_a$ の1次結合 $A = \sum m_a C_a$ が K の特性サイクルであるとは

$\forall Y \leftarrow V \to Z$ 等の孤立特性点 u に対し

Milnor公式

$$-\dim \mathrm{tot}\, \phi_u(K, g_u) = (A, dg)_{T^*V, u}$$ が成り立つこと

例 4.2 Y curve $\mathcal{F}$ on X $K = R\Phi_f \mathcal{F}$. const.

$$(CC\, R\Phi_f \mathcal{F})|_{x \times_Y y} = -(\dim \phi_x(\mathcal{F}, f)[T^*_y Y] + \dim \mathrm{tot}\, \phi_x(\mathcal{F}, f)[T^*_y Y])$$

$x \in X$

$K_{x \leftarrow y} = \mathcal{F}_x$, $K_{x \leftarrow \eta} = \psi_x(\mathcal{F}, f)$ の制限

Milnor公式 $CC\, R\Phi_f \mathcal{F}$ の 0-section 以外を計算.

定義4.3. $f: X \to Y$, $C \subset T^*X$

1. (P) (resp. (F)) $P \subset df^{-1}(C) \subset X \times_Y T^*Y \xrightarrow{df} T^*X \supset C$

irred cpt

$P \not\subset$ 0-section $\Rightarrow$ base Q is proper over Y (resp. finite) (resp. and $\dim P = \dim Y$)

2. (P). $f_! C \subset T^*Y$ を $df^{-1}(C)$ の像の閉包

(F) $A = \sum m_a C_a$, $(C = \bigcup C_a)$ に対し. $f_! A$ を, 0-section 以外.

例 Y curve なら (F) $\Leftrightarrow$ iso. char. pt.

$$f_! A = \sum_u (A, df)[T^*_y Y]$$

命題4.4. $f: X \to Y$ $\mathcal{F}$ micro supp on C

1. (P) ⇒ $R\Phi_f \mathcal{F}$ on $X \overleftarrow{\times}_Y Y$ は w.m.s on $f_\circ C$.

2. (F) ⇒ $f_! CC\mathcal{F}$ は 0-section 以外 $R\Phi_f \mathcal{F}$ の特性サイクル.

4.5 ひきもどし公式の証明.

$i: W \to X$ smooth div の imm.

$\mathcal{F}$ on X. micro supp C. i properly C-trans.

$$CC\, i^*\mathcal{F} = i^! CC\mathcal{F}$$

⇔ $i^! CC\mathcal{F}$ が $i^*\mathcal{F}$ に対して Milnor 公式をみたす.

$f: W \to Y$ isol cha pt

$$CC\, R\Phi_f i^*\mathcal{F} = f_! i^! CC\mathcal{F}$$

Cartesian

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & X \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

g ← (F) ① があったとする

Z surface

base change と可換になる

$$CC\, h^* R\Phi_g \mathcal{F} = h^! g_! CC\mathcal{F} \overset{4.4}{=} h^! CC R\Phi_g \mathcal{F}.$$

$R\Phi_g \mathcal{F}$ に 3節定理3.1 dim=2 を適用できれば OK.

① $X \subset \mathbb{P}$ W hyperplane section $f = p_L: W \to L = Y$ としてよい

$W = X \cap H$ $H \in \mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E) \leftrightarrow E_H \subset E$

$W \subset H = \mathbb{P}((E/E_H)^\vee)$ $L \subset \mathbb{P}(E/E_H) \leftrightarrow V \subset E/E_H$ 2次元

$Z = Gr(2, F)\ (= \mathbb{P}(F^\vee) \simeq \mathbb{P}^2)$ $F \subset E$ 3次元

② universal family. dense open で OK. flatness