2.5 ペンシルの場合

命題 5.1 E satisfies (C) & (E) とすると
$p_C^\circ : X_C^\circ \to C$ の孤立した特異点 u について
Milnor 公式
$$-\mathrm{dimtot}\,\varphi_u(\mathcal{F}, p_C^\circ) = (CC^E_C\mathcal{F}, dp_C^\circ)_{T^*X, u}$$
がなりたつ.

証明 両辺を $Z(\tilde{C})$ 上の関数と考える
$CC^E_C\mathcal{F}$ の定義より $Z(\tilde{C})$ の dense open 上では
なりたつ. 左辺は G 上 flat な constructible 関数
次を示せば良い

補題 5.2 右辺 $(CC^E_C\mathcal{F}, dp_C^\circ)_{T^*X,u} = (\mathbb{P}(\tilde{A}), X_L^\circ)_{X\times_{\mathbb{P}} Q, u}$
も G 上 flat.

補題 5.3 $Z \to S$ q.finite φ S 上 flat 関数.
φ が Z の dense open で $0 \Rightarrow \varphi = 0$.

5.2 の証明
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\tilde{C}) \arrow[d, phantom, "\cap"] & Z(\tilde{C}) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dr, phantom, "\square"] \arrow[ddr, "\text{q.finite}"] & \\
X\times_{\mathbb{P}} Q \arrow[d] & (X\times G)^\circ \arrow[l] \arrow[d] & \\
\mathbb{P}^\vee & D \arrow[l] \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

S 正則なら OK

補題 5.4 $\pi: X \to S$ finite type A $\mathcal{O}_X$-module の複体 D^b_{coh}
supp $= Z$ S 上 q.finite $\mathcal{O}_S$ 上 t.d.f
$\Rightarrow$ $\varphi_A(z) = \dim_{k(s)} A_z \otimes^L_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)$ は S 上 flat

証明 Z 上 étale local $Z \to S$ finite としてよい
Z_s 1点としてよい $R\pi_*A$ $\mathcal{O}_S$ 加群の perfect complex
$$\varphi_A(z) = \mathrm{rk}_{\mathcal{O}_S} R\pi_*A.$$

2.6 ~~#~~ 一般の場合. 消失輪体の安定性

命題 6.1. $\mathcal{F}$ micro supported on C. $f: X \to \overset{\text{curve}}{Y}$. u iso char

$\Rightarrow \exists N \geq 2$ s.t.

$g: X \to Y$.

$g \equiv f \mod m_u^N$

$\Rightarrow$ (1) $g: X \to Y$ u. iso. char.

(2) $\dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, f) = \dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, g)$

(3) $(C_a, df)_{T^*X, u} = (C_a, dg)_{T^*X, u}$

$f \equiv g \mod I_2$ とは $f|_2 = g|_2$

$$df^*(C_a)_u = C_a \times_{T^*X} X \quad \text{qt of } \mathcal{O}_{X,u} \text{ of finite length}$$
$$\text{||| } \mod m_u^{N-1} \qquad \text{annihilated by } m_u^{N-2}$$
$$dg^*(C_a)_u$$

補題 6.2 A Noether局所環. M 有限生成 A 加群

$$m^{n-1}M \subset m^n M \Rightarrow m^{n-1}M = 0$$

中山の補題を $m^{n-1}M$ に適用すればよい

6.2 $\Rightarrow$ (1), (3).

(2) ホモトピーを構成して 2.5節と同じ議論.

$Y = \mathbb{A}^1$ としてより

$h = (1-t)f + tg$.

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & Y \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl] \\ & \mathbb{A}^1 & \end{tikzcd}$$

h $u \times \mathbb{A}^1$ の近傍で $u \times \mathbb{A}^1$ を除き ~~loc. acyclic~~ $pr_1^* C$ - transversal

$\Rightarrow$ 〃 $pr_1^* \mathcal{F}$ - loc. acyclic

pr_2 $pr_1^* \mathcal{F}$ loc acyclic. generic local acyclicity.

$\Rightarrow$ $\dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, h_t)$ $t \in \mathbb{A}^1$ の function

flat $/\mathbb{A}^1$ = const.

§7. 一般の場合

$f: X \to \mathbb{A}^1$ $\quad$ $i: X \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee)$ $\quad$ (E) & (C)

N as in 命題 6.1

命題 7.1 $n \geq N$ なら
$$-\dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, f) = (CC_C^{E^{(n)}}\mathcal{F}, df)_{T^*X, u}$$

補題 7.2 $n \geq N$ なら $\exists L$ s.t. $f \equiv p_L^\circ \mod m_u^N$

$$E^{(n)} \to \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \to \mathcal{L}_u^{\otimes n}/m_u^{n+1}\mathcal{L}_u^{\otimes n} \quad \text{surj}$$

と 命題 5.1

命題 7.1 ⇒ 定理

$CC_C^E\mathcal{F}$ が E によらないことをいえばよい
E, E' $\quad CC_C^E\mathcal{F} = CC_C^{E^{(n)}}\mathcal{F} \quad n \gg 0$

C_a の係数が等しい $\quad f = p_L^\circ$