k 体 (標数 $p>0$ 完全(代数閉))

X smooth$/k$ localに $\mathbb{A}^n$ 上 étale

T^*X cotangent bdle $\Omega^1_{X/k}$ $\Omega^1_{\mathbb{A}^n/k}$ $dx_1, \dots, dx_n$

$X \xrightarrow{\delta} X \times X$ conormal bdle $T^*_X(X \times X)$

Λ 有限局所環 (体) 剰余標数 ℓ inv. in k

$\mathcal{F}$ X_{et} 上の Λ-mod の constructible complex

$U \to X$ étale 局所有限表示, 平坦, $\Omega^1_{U/X} = 0$

sheaf. 反変関手 + はりあわせ

abelian category

constructible: X の locally closed subset に分割 st $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ の制限がlocally constant constructible

例 $X = \mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$, T^*X dx, dy

$U = \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x^{\pm 1}, y] \xrightarrow{j} X$ open imm

$\Lambda \supset \zeta_p$ 1の原始p乗根

$V \to U$ p次巡回被覆 $t^p - t = \frac{y}{x^p}$

$\mathcal{G}$ U上の l.c.c shf of Λ-mod of rk 1 corresponding to non triv. ch. $\operatorname{Gal}(V/U) = \mathbb{F}_p \to \Lambda^\times$

$\mathcal{F} = j_! \mathcal{G} = j_* \mathcal{G}$

$\mathcal{F}|_U = \mathcal{G}$ l.c.c $\mathcal{F}|_D = 0$.

descent datum 降下材

$C = SS(\mathcal{F}) \subset T^*X$

conical closed subset

← $\mathbb{G}_m$の作用で安定 -- graded ideal で定義される

$I^\cdot \subset S^\cdot \Omega_X^{1\vee}$

$C = \bigcup C_a$ $\quad C_a$ irred cpt $\quad \dim C_a = \dim X$

$\mathcal{F}$の性質を統制する

1 $f: X \to Y$ $\quad$ local acyclicity

2 $h: W \to X$ $\quad$ transversality) Cに関する条件 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$に関する条件

横断性

$B = C \cap T^*_X X \subset X$ $\quad$ Cのbase $\quad B = \operatorname{supp} \mathcal{F}$

0-section

local on X $\quad X \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^n$ immersion.

$Q = \{(x, H) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee \mid x \in H\}$ $\quad$ univ. hyperplane

$\mathbb{P}^\vee = \{H \mid H \subset \mathbb{P}$ hyperplane$\}$ $\quad$ dual projective space

$$\begin{tikzcd} X & X \times_{\mathbb{P}} Q \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "p^\vee"] & \supset E \\ & \mathbb{P}^\vee & \end{tikzcd}$$

Eの外で $p^\vee$が $p^*\mathcal{F}$に関して univ loc. acyclic となる最小の閉集合

$\mathbb{P}(\tilde{C}) = E \subset X \times_{\mathbb{P}} Q = \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P})$

$$\begin{tikzcd} X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P} \arrow[r, two heads] & T^*X \\ \tilde{C} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & C \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

例 1. $SS(\mathcal{F})$ $\quad \mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ $\quad p \neq 2$

$= T^*_X X \cup \langle dy/D \rangle$

2. $\dim X = 1$ $\quad U \subset X$ $\quad \mathcal{F}|_U$ loc. cst となる最大のopen

$\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ loc. cst

$\mathcal{F}|_U \neq 0$ なら

$$SS(\mathcal{F}) = T^*_X X \cup \bigcup_{x \in X-U} T^*X \times_X x$$

0. $\mathcal{F}$ lcst, $\neq 0$ $\Rightarrow$ $SS\mathcal{F} = T^*_X X$

0' $U \subset X \supset D$ div. s.n.c. $\exists \mathcal{G}$ on U loc. const const. tamely ram / D

$\Rightarrow$ $SS\mathcal{F} = \bigcup_I T^*_{D_I} X$

$\mathrm{Char}\,\mathcal{F} = \sum m_a C_a$ $\quad SS\mathcal{F} = \cup C_a$ $\quad k$ perfect.

$m_a \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$

1. 特徴づけ Milnor ~~formula~~ 公式

$f: X \to Y = \mathbb{A}^1$ isolated char. pt. 孤立特性点

存在 ~~[illegible]~~ 消失輪体の全次元の安定性

2. ひきもどしとの両立性.

指数公式

$$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = (\mathrm{Char}\,\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X}$$

$\dim = 1$ なら G-O-S.

3. 分岐理論による計算.

例 1. $\mathcal{F}$ l.c.c. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ch}\,\mathcal{F} = (-1)^{n}[T^*_X X]$ $\quad n = \dim X$

2. tamely ram. $\Rightarrow$ $= (-1)^{n} \sum_I [T^*_{D_I} X]$

3. $\dim X = 1$ $\Rightarrow$ $=$

$$= (-1)\left(\mathrm{rk}\,\mathcal{F} \cdot [T^*_X X] + \sum_{x \in X-U} a_x(\mathcal{F}) \cdot [T^*_x X]\right)$$

$$a_x\mathcal{F} = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}_{\bar{\eta}} - \mathrm{rk}\,\mathcal{F}_x + \mathrm{Sw}_x\,\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$$

問題 $(\mathrm{Ch}\,\mathcal{F}, T^*_X X) = \mathrm{rk}\,\mathcal{F} \cdot (2-2g) - \sum a_x(\mathcal{F}) \cdot \deg x$

Swan conductor

4. $X = \mathbb{A}^2$ $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ $\quad [T^*_X X] + p \cdot [dy/D]$

- $\to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to$ dis. tri. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ch}\,\mathcal{F} = \mathrm{Ch}\,\mathcal{F}' + \mathrm{Ch}\,\mathcal{F}''$

$SS\mathcal{F} \subset SS\mathcal{F}' \cup SS\mathcal{F}''$

- $\mathcal{F}$ perverse $\Rightarrow$ $\mathrm{Ch}\,\mathcal{F} \geqq 0$ $\quad (\because \forall a\ m_a \geqq 0)$

$SS\mathcal{F} = \mathrm{supp}\,\mathrm{Ch}\,\mathcal{F}$ $\quad (\forall a\ m_a > 0)$

1. C-transversality 横断性

$C \subset T^*X$ conical closed.

$f: X \to Y$ と $h: W \to X$ に対し、それぞれ C と transversal を定義

smooth scheme への射

定義 1.1. $h: W \to X$, $C \subset T^*X$

1. $w \in W$ で h が w で C と横断的 とは

$$h^\circ C = W \times_X C$$
$$\cap$$
$$K \subset W \times_X T^*X \longrightarrow T^*W$$

$(h^\circ C \cap K) \times_W w \subset \{0\}$ となること

2. h が C と横断的 とは $h^\circ C \cap K \subset$ 0-section となること

例 (=問題) $D \subset X$ 単純正規交叉因子, $C = \bigcup T^*_{D_I} X$ とする

$h: W \to X$ が C と横断的 $\Leftrightarrow$ $\forall i$ $W \times_X D_i \subset W$ は smooth 因子で $W \times_X D$ は W の S.N.C.D

命題 1.2. 1. 開条件.

2. $h: W \to X$ が C 横断的なら, $W \times_X T^*X \to T^*W$ は $h^\circ C$ 上有限

証明. 1. $h^\circ C \cap K \subset W \times_X T^*X$ は closed conical.

射影化 $\mathbb{P}(h^\circ C \cap K) \subset \mathbb{P}(W \times_X T^*X)$ の W での像は閉.

2. $h: W \to X$ を 合成 $W \xrightarrow{\text{閉}} W \times X \xrightarrow{P} X$ に分解して. h は imm としてよい

ベクトル束の完全列 $0 \to K \to W \times_X T^*X \to T^*W \to 0$ が得られる

$$\mathbb{P}(\quad) \xrightarrow{\text{proj}} \mathbb{P}(T^*W)$$
$$\text{Iblup} \qquad \cong \qquad \cup$$
$$\mathbb{P}(K) \subset \mathbb{P}((W \times_X T^*X) \oplus \mathbb{A}^1) \supset \mathbb{P}(h^\circ C \times \mathbb{A}^1) \longrightarrow T^*W$$
$$\cup$$
$$W \times_X T^*X \supset h^\circ C$$

$h^\circ C \subset T^*W$ は $W \times_X T^*X \to T^*W$ による $h^\circ C \subset W \times_X T^*X$ の像

定義1.3 $f: X \to Y$. $C \subset T^*X$

1 $x \in X$ f が x で C と横断的 とは

$$\begin{array}{ccc} df^{-1}(C) & & C \\ \cap & & \cap \\ K \subset X \times_Y T^*Y & \xrightarrow{df} & T^*X \end{array}$$

$(df^{-1}(C) \cap K) \times_X x \subset \{0\}$ となること

2. f が C と横断的とは $df^{-1}(C) \cap K \subset 0$-section

例 (= 問題) $C = T^*_X X$ とする

$f: X \to Y$ が C と横断的 $\Leftrightarrow$ $f: X \to Y$ smooth

$D \subset X$ SNCD $C = \bigcup T^*_{D_I} X$

$f: X \to Y$ が C 〃 $\Leftrightarrow$ $f: X \to Y$ smooth + D SNC rel to f.

定義 $X \xleftarrow{h} W \xrightarrow{f} Y$ が C-横断的 とは h C 横断的 & f. $h^\circ C$ 横断的

2 局所非輪状性.

Milnor fiber $f: X \to S$ x geom pt of X

$s = f(x) \quad = S$

$(X \times_S S_{(s)}) \times_{S_{(s)}} t$ 近傍 $X \times_S S_{(s)}$ $S_{(s)}$ strict localization t. geom pt of $S_{(s)}$

s t の特殊化 $x \leftarrow t$

Dedekind $X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t$ Milnor fiber $X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S(t)$ Milnor tube

$S_{(s)}$ ~~dim~~ のとき. nearby cycle. vanishing cycle

定義2.1.1. $f: X \to S$ が $\mathcal{F}$ に関して局所非輪状的とは.

すべての特殊化 $x \leftarrow t$ に対し 標準射

$\mathcal{F}_x = R\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{F}|_{X_{(x)}}) \longrightarrow R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t, \mathcal{F}|_{X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t})$

が同形であること

2. $f: X \to S$ が —— 普遍的に —— とは

すべての base change $S' \to S$ に対し. $X \times_S S' \to S'$ が $pr_1^* \mathcal{F}$ に関して局所非輪状的であること

($S' = \mathbb{A}^1_S$ としてよい)

例 (= 問題) id: $X \to X$ が $\mathcal{F}$ に関して局所非輪状的

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が locally const cont

2. $\mathcal{F}$ が l.c.c ($l \neq p$) smooth 射 $f: X \to$ とは

3 generic loc. acyclicity. 定理 $\mathcal{F}$ に関して ——.

4. tame

3 Singular support

X, k, $\mathcal{F}$, C

定義3.1 1. $\mathcal{F}$ が C に超局所台をもつとは

$\forall X \xleftarrow{h} W \xrightarrow{f} Y$ C 横断的 ならば $f: W \to Y$ が
$h^*\mathcal{F}$ に関して局所非輪状的 であることをいう.

2. $\mathcal{F}$ が C に弱超局所台をもつとは
$\forall X \xleftarrow{h} W \xrightarrow{f} Y$. h étale $\dim Y = 1$. に対して 上と同様

・$h: W \to X$ 局所的に. 横断的 $\Rightarrow$ loc. acyclic

例1 1. $\mathcal{F}$. loc. cst $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ は $T^*_X X$ に ——

2. $\mathcal{F}$ loc. tame along D $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ は $\bigcup T^*_{D_I} X$ に micro supp.

(問題)
3 $\dim X = 1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ は $T^*_X X \cup \bigcup_{x \in (X - U)} (T^*X \times_X x)$:

定義3.2 1. 最小の超局所台 が存在するとき. $\mathcal{F}$ は特異台をもつといい,
最小のものを 特異台という. $SS\mathcal{F}$

2 最小の弱超局所台 を 弱特異台という $SS^w\mathcal{F}$.

$SS^w(\mathcal{F}) = \{ df \mid f: W \to Y$. ~~局所非輪~~ $\phi_x(\mathcal{F}, f) \neq 0 \}$ の閉包
vanishing cycle

命題3.3 $SS^w(\mathcal{F})$ の base $=$ Supp of $\mathcal{F}$

$\subset$ $\mathcal{F}|_U = 0 \Rightarrow B \cap U = \phi$

$\supset$ $f: X \to \mathbb{A}^1$ 0. $\Phi = \mathcal{F}$ $\quad$ $\mathrm{Supp} \subset B \subset SS^w(\mathcal{F})$

定理3.4 任意の $\mathcal{F}$ は特異台をもつ $SS\mathcal{F} = SS^w(\mathcal{F})$ である

$SS(\mathcal{F}) = \bigcup C_a$ とすると $\dim C_a = \dim X$.