No.
DATE

4. $f: X \to Y$ smooth $D \subset X$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{smooth}/k}}{Y}$上 単純正規交叉因子

$U = X - D$ $\mathcal{G}$: U上 loc. const.
Dにそって tamely ramified

$\Rightarrow$ $f: X \to Y$ は $\underset{j:\mathcal{G}}{Rj_*\mathcal{G}}$ に関して loc. acyc.

(3a Appendix Illusie)

9/25 1.3 特異台

$X, k, \mathcal{F}, \Lambda$ $C \subset T^*X$

定義 3.1

1. $\mathcal{F}$がCに超局所台をもつとは
(C-transversal $\Rightarrow$ loc. acyc)

$\forall\, X \xleftarrow{h} \underset{\substack{\uparrow \\ (X上\text{"local"})}}{W} \xrightarrow{f} Y$ $W, Y/k$ smooth
h: C-transversal
f: $h^\circ C$-transversal

$\Rightarrow$ $f: W \to Y$ が $h^*\mathcal{F}$に関して loc. acyclic

になることをいう

2. $\mathcal{F}$がCに弱超局所台をもつとは
1と同様だが, Yとしては smooth な curve
($Y = \mathbb{A}^1$だけでも同じ)

$h: W \to X$ としては k 無限体なら open imm.

k: 有限体なら $V \hookrightarrow X$ open imm. k'/k 有限次拡大

$h: W = V \otimes_k k' \to V \to X$ だけを考える.

実際には $h: W \to X$ étale を考えるといっても

結果は同じ.

・超局所台をもつ ⇒ 弱超局所台をもつ.

・$C \subset C'$ $\mathcal{F}$がCに— ⇒ C'に—

(C'-transversal ⇒ C-transversal)

復習 $\mathcal{F}$が $\underset{\text{閉集合}}{B} \subset X$ に台をもつとは $\mathcal{F}|_{X-B} = 0$

例(= 問題)

1. $\mathcal{F}$: loc. const ⇒ $\mathcal{F}$は$T^*_X X$に超局所台をもつ.

2. $X \supset D$ 単純正規交叉因子

   $U = X - D$, $\mathcal{G}$: loc. const / U, $j: U \hookrightarrow X$

   Dにそって tamely ramified なら

   $\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ は $\bigcup_I T^*_{D_I} X$ に超局所台をもつ.

3. $\dim X = 1$ $U \subset X$ dense open $\mathcal{F}|_U$ loc. const

   $D = X - U \subset X$ とすると

   $\mathcal{F}$は $T^*_X X \cup \bigcup_{x \in D} (T^*X \times_X x)$ で超局所台をもつ.

定義 3.2

1. 最小の超局所台があるとき、それを特異台といい、
   $SS(\mathcal{F})$ とかく.
2. 最小の弱超局所台を弱特異台といい
   $SS^w(\mathcal{F})$ とかく.

$f: X \to Y$ 　curve

$X \times_Y T^*Y \to T^*X$ の $x \in X$ での fiber.

fiber は直線 　　$T^*X \supset C$

$df^{-1}(C)_x \cap (X \times_Y T^*Y)_x \subset \{0\}$ 　f が x で C-trans

$\Updownarrow$

$(X \times_Y T^*Y)_x$ の像が C_x に含まれない.

命題 3.3

$$SS^w(\mathcal{F}) = \{ df \text{ at } x\ (\in T^*X \times_X x) \mid f: W \to \mathbb{A}^1 \text{ で } \phi_x(h^*\mathcal{F}, f) \neq 0 \}$$

$(\in \Gamma(W, \mathcal{O}_W))$ 　vanishing cycle

$(\subset T^*X)$ の閉包.

命題 3.3 の証明

上のことより

f が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc "$\Leftrightarrow$" $\phi_x(\mathcal{F}, f) = 0$

をいえばよい.

y≠tならば $\mathcal{F}_x$ ⇝ t≠yは考えなくてよい.

$f : X \to Y$ $\quad x \leftarrow t \quad$ $\mathcal{F}_x \underset{(*)}{\xrightarrow{\simeq}} R\Gamma(X_{(x)} \times_{Y_{(y)}} t, \mathcal{F})$

$\;\;\cup\qquad\;\; \cup$

$\;\;x \qquad\;\; y \quad$ $Y_{(y)} \leftarrow t$ trait $\quad$ loc. acyc. $\quad =$

$\Psi_x(\mathcal{F}, f_{(y)})$

$f_{(y)} : X \times_Y Y_{(y)} \to Y_{(y)}$ $\quad \Psi(\mathcal{F}, f_{(y)})$ nearby cycle

$\to \mathcal{F}|_{X \times_Y y} \to \Psi(\mathcal{F}, f_{(y)}) \to \Phi(\mathcal{F}, f_{(y)}) \to$

$X \times_Y y$ 上の complexes の dist. triangle.

(*)が同形 $\iff \Phi_x(\mathcal{F}, f_{(y)}) = 0$. //

命題 3.4

$SS^w(\mathcal{F})$ の base $=$ $\mathcal{F}$ の support $\left(= \mathcal{F}|_{X-B}\right.$ となる 最小の閉集合$\left.\right)$

$\;\;\; \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$C \subset T^*X \quad (C \cap T^*_X X \subset X) \qquad B$

$\subset$: 命題 3.3より明らか.

$\supset$: $f : X \to \mathbb{A}^1$ の定数射

$\Psi = 0 \quad \Phi = \mathcal{F}[1]$

このfについて $\Phi_x(\mathcal{F}, f) \neq 0 \iff \mathcal{F}_x \neq 0$

$SS^w(\mathcal{F}) \supset \{0 \text{ at } x \,(\in T^*X \times_X x) \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ の閉包

$\;\;\cup \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\;\;B \quad \supset \qquad\quad \mathrm{Supp}\,\mathcal{F} \subset X = T^*_X X$ //

No.

DATE

定理3.5 (Beilinson)

任意のFは特異台 $SS(\mathcal{F})$ をもち, $SS(\mathcal{F}) = SS^w(\mathcal{F})$.

X:連結 $\dim X = n$ とし, $C = \bigcup_a C_a$ 既約成分

とすると, $\forall a$, $\dim C_a = n$ である。//

1.4. Radon 変換

$$\begin{array}{ccc} & Q \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee & \text{universal hyperplane} \\ & {}^{p}\swarrow \quad \searrow^{p^\vee} & \\ \mathbb{P} & & \mathbb{P}^\vee \end{array}$$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee) = \{E^\vee$ 内の line$\}$ $\quad E = \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1))$

$\mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E) = \{E^\vee$ 内の hyperplane$\}$

$$1_E \in E \otimes E^\vee = \Gamma(\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee, \mathcal{O}(1,1))$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{End}(E)} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{p_1^*\mathcal{O}(1) \otimes p_2^*\mathcal{O}(1)}$$

$$Q = (1 = 0)$$

$$\begin{array}{ccc} & Q \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee & \\ \swarrow & \searrow \; \swarrow & \text{proj. space bdle} \\ \text{hyperplane束} & \mathbb{P} & \end{array}$$

射影化, $\mathbb{P}$上の自明なvector束

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}_{\mathbb{P}}(E \times \mathbb{P})$$

$$\overset{\cup}{Q} = \overset{\cup}{\mathbb{P}}(\text{余次元1の部分ベクトル束})$$

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}} \to E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to 0 \quad \text{完全列}$$

$E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ の twist

$\mathbb{P}(C) \subset \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}) \hookrightarrow \mathbb{P}(E \times \mathbb{P}(\cancel{V}))$

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C^\vee)$, $\quad \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}) = Q = \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^\vee)$, $\quad \mathbb{P}(E \times \mathbb{P}(V)) = \mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E^\vee \times \mathbb{P}^\vee)$

$\mathbb{P}(C^\vee) \subset \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}(E^\vee \times \mathbb{P}^\vee)$ ← Legendre 変換

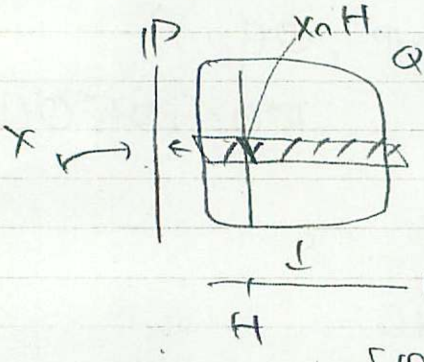
$T^*\mathbb{P}$ の conical closed subset $\overset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$ $T^*\mathbb{P}^\vee$ の conical closed subset

$C \qquad\qquad\qquad C^\vee$

$C \overset{\text{単射}}{\longmapsto} (\mathbb{P}(C),\ B = C \cap T^*_X X)$

B を supp とすると, $\mathbb{P}(C)$ がわかれば C がわかる.

$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ immersion



$\mathbb{P}^\vee \ni H$

$= \{\mathbb{P}$ の hyperplane$\}$

$Q \cap (X \times \mathbb{P}^\vee) = X \times_{\mathbb{P}} Q$ ← universal hyperplane section

$= X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{P}(T^*\mathbb{P})$

$= \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P})$

$X \hookrightarrow \mathbb{P} \qquad X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P} \to T^*X$ 全射

核 $= T^*_X\mathbb{P}$ 余法束

$X \times_{\mathbb{P}} Q = \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}) \overset{\text{射影化}}{\longleftarrow} X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P} \longrightarrow T^*X$

$\mathbb{P}(\tilde{C}) \subset \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P})$, $\quad \tilde{C} \subset X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}$, $\quad C \subset T^*X$

$\mathbb{P}(\tilde{C}) \qquad \tilde{C} \longrightarrow C$

回復

+ $SS(\mathcal{F})$ の base = supp $\mathcal{F}$

No

DATE

定理 4.1 $C = SS(\mathcal{F})$ とすると,

$\mathbb{P}(\tilde{C})$ は $\underbrace{E_{p^\vee}(p^*\mathcal{F})}_{\uparrow} \subset X \times_{\mathbb{P}} Q$ である

$$X \times_{\mathbb{P}} Q = \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P})$$

$f: X \to Y$ スキームの射 $\mathcal{F}$: X 上の constructible complex

$E_f(\mathcal{F})$ は X の開集合 U で f の U への制限

$f_U: U \to Y$ が $\mathcal{F}|_U$ に関して univ. loc. acyc. と

なるもののうち最大のものの補集合

("f が loc. acyclic にならないもの")

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & p^*\mathcal{F} \\ X & \xleftarrow{p} & X \times_{\mathbb{P}} Q \\ & & \downarrow p^\vee \\ & & \mathbb{P}^\vee \end{array}$$

$X = \mathbb{P}$ に帰着.

$i: X \to \mathbb{P}$ を $X \xrightarrow[\text{closed}]{i'} V \xrightarrow[\text{open}]{j} \mathbb{P}$ に分解.

$$SS(j_! i'_* \mathcal{F})|_V = SS(i'_* \mathcal{F}) = \underset{\sim}{i'_\circ} SS(\mathcal{F}) = \tilde{C}$$

$i: X \to Y$ smooth scheme の closed imm.

$C \subset T^*X$ closed conical

$$\begin{array}{ccccc} T^*X & \xleftarrow{di} & X \times T^*Y & \hookrightarrow & T^*Y \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C & \leftarrow & di^{-1}(C) & \Rightarrow & i_\circ C \end{array}$$

$X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P} \hookrightarrow T^*\mathbb{P}$.

以下 $X = \mathbb{P}$

Thm (Beilinson Thm 3.2)

$$\mathbb{P}(C) = E_p(p^{\vee *} \underbrace{R\mathcal{F}}_{\text{Radon 変換}})$$

Lem (Beilinson Lem 3.3)

$C' = SS(R\mathcal{F})$ とすると、$\mathbb{P}(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Legendre 変換}}}{=} \mathbb{P}(C')$

・Radon 変換.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \quad \mathbb{P} & Q \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "p^\vee"] \\ & \mathbb{P}^\vee \quad \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

$R\mathcal{F} = Rp^\vee_* p^* \mathcal{F}$ (naiveな) Radon 変換

$R^\vee \mathcal{G} = Rp_* p^{\vee *} \mathcal{G}$ 逆 Radon 変換

(本当は ( ) [ ])

$$\mathbb{P}(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lem}}}{=} \mathbb{P}(C') \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Thm を } R\mathcal{F} \text{ に適用}}}{=} E_{p^\vee}(p^* R^\vee R\mathcal{F})$$

あとは $E_{p^\vee}(p^* R^\vee R\mathcal{F}) = E_{p^\vee}(p^* \mathcal{F})$ をいえばよい.

$\mathcal{F}$ と $R^\vee R\mathcal{F}$ は ほとんど同じ / ずれは loc. const.

smooth morphism の local acyclicity

∴ ずれが loc. const. を示せばよい