No.

DATE

10/23 2.7. 一般の場合

$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ … $CC_c^E \mathcal{F}$

命題 5.1 ペンシルの場合のMilnor公式

$$-\dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, p_c^\circ) = (CC_c^E \mathcal{F}, dp_c^\circ)_{T^*X, c}$$

$f : X \to Y$ u

命題 6.1 $N \gg 0$ $\forall g \equiv f \bmod m_u^N$ なら

$$\dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, f) = \dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, g)$$

$$(CC_c^E \mathcal{F}, df)_{T^*X, u} = (CC_c^E \mathcal{F}, dg)_{T^*X, u}$$

N: 命題 6.1 の N

命題 7.1 $f : X \to Y$ (smooth curve) u: fの孤立特性点

$i : X \hookrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee)$ うめこみ とすると

$n \geq N$ ならば

$$-\dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, f) = (CC_c^{E^{(n)}} \mathcal{F}, df)_{T^*X, u}$$

がなりたつ.

$E \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}(1)$

$E^{(n)} = \mathrm{Im}(S^n E \to \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})) \rightsquigarrow i_n : X \to \mathbb{P}_{(n)}$

$i \searrow \mathbb{P}$ ↗ n-th Veronese

No.
DATE

$Y=\mathbb{P}^1$ としてよい。（∵ étale local）

補題 7.2　n（にℓならば）

$\exists L \subset \mathbb{P}^{\vee}_{(n)}$ s.t. $X \cap A_L \ni u$, $X \supset X_L^{\circ} \ni u$,
$\quad \cup\!\!\!\mid$
$\quad \mathbb{P}^1$

$f|_{X_L^{\circ}} \equiv p_L \mod m_u^n$ をみたす

証明

$E \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}) \to \mathcal{L}_u / m_u^2 \mathcal{L}_u$ 合成は全射

（∵ $X=\mathbb{P}^n$ のときは明らか

$S^n E \to E^{(n)} \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \to \mathcal{L}_u^{\otimes n} / m_u^{n+1} \mathcal{L}_u^{\otimes n}$ 合成は全射

（〃）

//

命題 7.1 の証明

$$-\dim \mathrm{tot}\, \Phi_u(\mathcal{F}, f) \overset{?}{=} (CC_c^{E^{(n)}} \mathcal{F}, df)_{T^*X, u}$$

7.2+6.1 → ‖　　　‖ ← 7.2+6.1

$$-\dim \mathrm{tot}\, \Phi_u(\mathcal{F}, p_L) \underset{5.1}{=} (CC_c^{E^{(n)}} \mathcal{F}, dp_L^{\circ})_{T^*X, u}$$

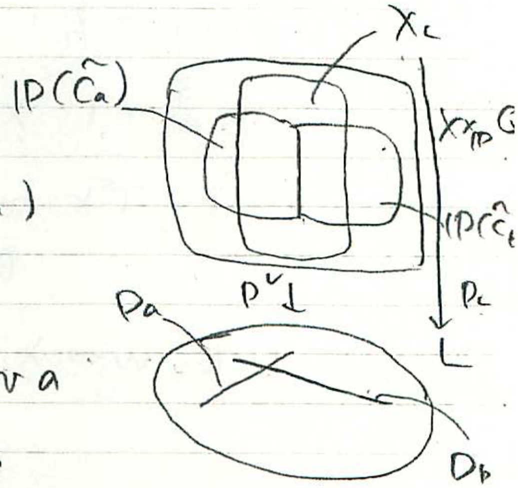
定理の証明

$CC_c^E \mathcal{F}$ が E によらないことを示せばよい。

E 任意　E' fix

$n \gg 0$ なら $CC_c^E \mathcal{F} = CC_c^{E'^{(n)}} \mathcal{F}$ をいえばよい。

Cの既約成分は有限個だから、各成分ごとに
係数の一致をいえばよい。



$$C = \bigcup_a C_a$$

$$X\times_{\mathbb{P}} Q \supset \mathbb{P}(\hat{C}) = \bigcup \mathbb{P}(\hat{C}_a)$$

$p^\vee \downarrow$

$\mathbb{P}^\vee \ni L$ を $L\cap D_a$ の交点 v_a
上に isolated char. pt u,
vは他の $L\cap D_b$ に含まれないようにとる。

$$CC_c^{E}\mathcal{F} = \sum m_a [C_a]$$

$$CC_c^{E^{(n)}}\mathcal{F} = \sum m_a^{(n)} [C_a]$$

$$-\mathrm{dimtot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, dp_c^\circ) = (CC_c^{E}\mathcal{F}, dp_c^\circ)_{T^*X,u} = m_a \overset{\neq 0}{(C_a, dp_c^\circ)_{T^*X}}$$

$$\|$$

$$-\mathrm{dimtot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, dp_c^\circ) \underset{n\gg 0}{=} (CC_c^{E^{(n)}}\mathcal{F}, dp_c^\circ)_{T^*X,u} = m_a^{(n)}(C_a, dp_c^\circ)_{T^*X}$$

$f = p_c^\circ$ に 7.1

//

3. 指数公式 k: perfect

3.1 ひき戻し

定義 1.1 X: 既約成分の次元が全て n, smooth$/k$

$C \subset T^*X$ conical closed subset

既約成分の次元が全て n

$h: W \to X$ k上の smooth scheme の射

W: 既約成分の次元が全て m

1. h が properly C-transversal であるとは

h が C-transversal かつ $h^*C = W \times_X C$ の

既約成分の次元が全て m

注) いつも $\geq m$

$$W \xrightarrow[\text{reg imm}]{} W \times X \xrightarrow[\text{smooth}]{} X$$

h: smooth $\Rightarrow$ properly C-transversal

reg. imm. の場合

可換代数の定理

A: Noether 局所環

$f_1, \cdots, f_c \in \mathfrak{m}_A$ とすると、

$$\dim A/(f_1, \cdots, f_c) \geq \dim A - c$$

A: integral なら $=$ $\Leftrightarrow$ $f_1, \cdots, f_c$: 正則列

No.
DATE

2. $h: W \to X$ properly C-transversal

$A = \sum m_a C_a$

$h^! A$ を $h^\circ C$ に台をもつ cycle として次のように定義

$$\begin{array}{ccccc} C & \longleftarrow & h^* C = W \times_X C & \xrightarrow[\text{finite}]{} & h^\circ C \\ \cap & & \cap & & \cap \\ T^* X & \longleftarrow & W \times_X T^* X & \longrightarrow & T^* W \end{array}$$

← 既約成分の次元は全て m

$$A \underbrace{\xrightarrow[\text{pull-back}]{} h^* A \xrightarrow[\text{push-forward}]{}}_{\text{交点理論}} h^\circ A$$

↑ algebraic correspondence 代数的対応

$h^* A \quad h^* C_a = \bigcup C_b' \qquad$ length $\mathcal{O}_{h^* C_a, \eta_b'}$ $\quad C_b'$ a gen. pt

$\qquad\qquad\qquad\;\; = \sum \bigcirc [C_b'] \qquad W \times_X C_a$

C_a: 整 $= $ 既約 + 被約 $\qquad$ cycle

$\qquad\qquad\qquad\;\; = [\mathcal{O}_{h^* C_a}] = h^* [\mathcal{O}_{C_a}]$

$h^! A := (-1)^{n-m} h^\circ A \quad \left(\text{cf. } CC\mathcal{A} = (-1)^{\dim X} T^*_X X\right)$

//

例 1.2 $\quad X = \mathbb{A}^2 \quad U = \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x^{\pm 1}, y] \quad p \neq 2.$

$\mathcal{G}: t^p - t = \dfrac{y}{x^p}$ で定まる rank 1

$\mathcal{F} = j_! \mathcal{G} \quad j: U \hookrightarrow X$

$CC\mathcal{F} = [T^*_X X] + p[\langle dy/D \rangle] \quad D = (x=0)$

$\langle dy/D \rangle \subset T^*X \times_X D$

$C = T^*_X X \cup \langle dy/D \rangle$

No

DATE

imm $i: D \to X$ は C-trans. だが, not properly C-tra

$$\begin{array}{ccccc} D \times_X T^*X & \supset & i^*C = (0\text{-section}) & \cup & \langle dy/D \rangle \\ \downarrow & & \downarrow\wr & & \wr\mid \\ T^*D & \supset & T^*_D D & & T^*D \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ C-tran

$\uparrow \dim = 2$

$\therefore$ properly C-tran でない

定理 1.3. X, C as above $\mathcal{F}$: micro supp'd on C.

$CC\mathcal{F} = \sum m_a C_a$ $h: W \to X$ as above.

$h: W \to X$: properly C-transversal ならば

$CC\, h^*\mathcal{F} = h^! CC\mathcal{F}$ がなりたつ. //

命題 1.4 (問題, Beilinson)

$h: W \to X$: C-transversal なら,

$\mathcal{F}$: micro-supp'd on $C \Rightarrow h^*\mathcal{F}$ micro-supp'd on $h^\circ C$

定理 1.3 の証明の方針

(1) 命題 1.4 $\Rightarrow$ 両辺 $h^\circ C$ の成分の1次結合

係数をCC較すればよい.

(2) $h: W \to X$ $\quad W \underset{\substack{\text{reg.}\\ \text{imm}}}{\to} W \times X \underset{\text{smooth}}{\longrightarrow} X$

(1) より smooth は reg. imm. に帰着

W: sm/k, étale local ⇒ $W = \mathbb{A}^n \times W$ に帰着

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0\text{-section}"] \arrow[dr, "id"'] & W = \mathbb{A}^n \times X \arrow[d, "pr"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(3) div. に帰着

次元に関する帰納法.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[dr] & V \arrow[d, "g", "\mathrm{div.}"'] \\ & X \end{tikzcd}$$

← V をちぢめる properly C-trans

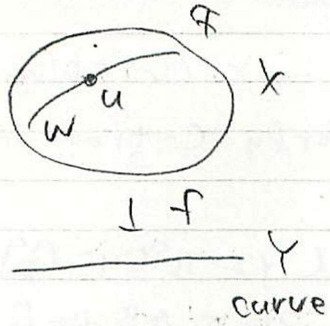
properly $g^\circ C$-trans

(略)

dim $X = 2$ の場合に帰着させて証明

両方難しいので後回し

定理1.3の式: $h^*CC(\mathcal{F})$ が $h^*\mathcal{F}$ に対して Milnor 公式をみたす



右辺: $f: X \to Y$ に対し, $\mathcal{F}$ について Milnor 公式をみたすものを W に制限. $\dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(\mathcal{F}, f)$

左辺: $f|_W: W \to Y$ に対し, $h^*\mathcal{F}$ について Milnor 公式 $\dim\mathrm{tot}\,\Phi_u(h^*\mathcal{F}, f|_W)$

3.2 指数公式

定理2.1 $k=\bar{k}$ とする. X: projective なら

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (CC(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X} \quad //$$

証明 $\dim X = 1$ なら G-O-S公式

帰納法で1次元に帰着

$X \hookrightarrow \mathbb{P}$ closed imm. CC) S(E)

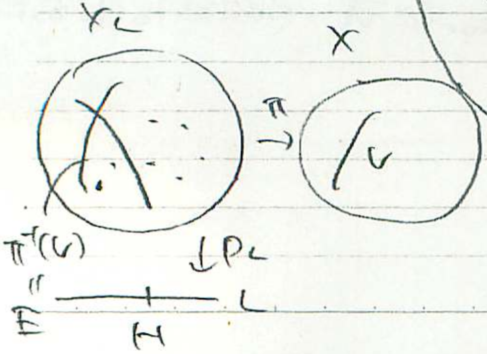
good pencil の存在 $\quad C = SS(\mathcal{F})$

$L \subset \mathbb{P}^\vee$ が good pencil とは,

- 有限個の点を除き $H \in L$ ならば $h: W = X \cap H \to X$ は properly C-trans.
- $h': V = X \cap A_L \to X$ も properly C-trans.

  ↑ transversal ↑ pencil の軸

  ($\Rightarrow \pi: X_L \to X$ (V でblow-up) も properly C-transversal)
- $p_L: X_L \to L$ は $\pi^\circ C$ に関して, 有限個の孤立特異点しかもたず, それらは $\pi^{-1}(V)$ に含まれない.



No.
DATE

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \chi(X_L, \pi^*\mathcal{F}) - \chi(V, \mathcal{F}|_V)$$

帰納法の仮定＋定理1.3

$$\chi(X_L, \pi^*\mathcal{F}) = \chi(L, Rp_{L*}\pi^*\mathcal{F})$$

$$= \underbrace{\chi(L)}_{=2} \cdot \chi(W, \mathcal{F}|_W) - \sum_a \mathrm{dimtot}\, \Phi_a(\mathcal{F}, p_L)$$

G-O-S

Milnor公式