No.

DATE

$\dim X = 1$ のとき Grothendieck-Ogg-Shafarevich SGA5

9/18 指数公式

k：代数閉 X：射影的なら

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (\mathrm{char}\,\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X}$$

・X：曲線 ⇒ G-O-S

・$\mathcal{F} = \Lambda$ $\quad \chi(X, \Lambda) = (-1)^n \deg c_n(\Omega^1_{X/k})$

char $\mathcal{F}$ の例

1. $\mathcal{F}$：loc. const. ⇒ $\mathrm{char}\,\mathcal{F} = (-1)^n \mathrm{rk}\,\mathcal{F}\,[T^*_X X]$

2. $U = X - D \subset X \supset D$ div. w. simple normal crossing

$\mathcal{G}$：U 上 loc. const. D に沿って tamely ramified

$j : U \hookrightarrow X$ open imm, $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ (or $Rj_* \mathcal{F}$)

$$\mathrm{char}\,\mathcal{F} = (-1)^n \mathrm{rk}\,\mathcal{G} \cdot \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} [T^*_{D_I} X]$$

$$D = \bigcup_{i=1}^m D_i, \quad D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$$

(一般に $\mathrm{char}\, Rf_! \mathcal{F} = \mathrm{char}\, Rf_* \mathcal{F}$.)

No.

DATE

3. $\dim X = 1$, k: perfect

$U \subset X$ dense open $\mathcal{F}|_U$ loc. const.

$$\mathrm{Char}\,\mathcal{F} = (-1)\left(\mathrm{rk}\,\mathcal{F}\,[T^*_X X] + \sum_{x \in X - U} a_x(\mathcal{F})\,[T^*_x X]\right)$$

$a_x(\mathcal{F})$: Artin-conductor

$= \dim \mathrm{tot}_x \mathcal{F} - \mathrm{rk}\,\mathcal{F}_{\bar{x}}$

$K_x = \mathrm{Frac}\,\mathcal{O}_{X,(\bar{x})}$

↖ strict localization

(= strict henselization)

hensel d.v.r. 剰余体に代数閉

$\eta_x = \mathrm{Spec}\,K_x$

$\mathcal{H}^q(\mathcal{F})_{\bar{\eta}_x}$: $\mathrm{Gal}(\bar{K}_x/K_x)$ の表現

$\mathrm{Sw}\,\mathcal{H}^q(\mathcal{F})_{\bar{\eta}_x} \in \mathbb{N}$ Swan conductor

$= 0 \iff$ tamely ramified

$$\dim \mathrm{tot}_x \mathcal{F} = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}_{\bar{\eta}_x} + \underbrace{\mathrm{Sw}\,\mathcal{F}_{\bar{\eta}_x}}_{\displaystyle \sum_q (-1)^q\,\mathrm{Sw}\,\mathcal{H}^q(\mathcal{F})_{\bar{\eta}_x}}$$

問題 例 3 + 指数公式 ⇒ G-O-S を示せ.

例14 $X = \mathbb{A}^2$ $\mathcal{G}: t^p - t = \dfrac{y}{x^p}$ $p \neq 2$

$\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ $\mathrm{Char}\,\mathcal{F} = [T^*_X X] + p\langle dy/D\rangle$

加法性) $\to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to$ dist. triangle

$\mathrm{char}\,\mathcal{F} = \mathrm{char}\,\mathcal{F}' + \mathrm{char}\,\mathcal{F}''$

$SS\,\mathcal{F} \subset SS\,\mathcal{F}' + SS\,\mathcal{F}''$

正規性: $\mathcal{F}$: perverse sheaf

$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \sum m_a C_a}}{\mathrm{char}\,\mathcal{F}} \geq 0$ (i.e. $\forall m_a \geq 0$)

$\mathcal{G}$: smooth sheaf $/X$ $\dim X = n$

$\mathcal{F} = \mathcal{G}[n]$: perverse sheaf

$\mathrm{char}\,\mathcal{F} = (-1)^n \mathrm{char}\,\mathcal{G} = \cancel{(-1)^{n+n}} \underset{\substack{\vee\!\! | \\ 0}}{\mathrm{rk}\,\mathcal{G}} [T^*_X X]$

$\underset{\substack{\| \\ \cup C_a}}{SS\,\mathcal{F}} = \underset{\substack{\| \\ \sum m_a C_a}}{|\mathrm{Char}\,\mathcal{F}|}$ ($\mathcal{F}$: perverse sheaf)

※ $\Lambda_0 := \Lambda/m$ 剰余体

$\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \otimes_\Lambda \Lambda_0$

$\Rightarrow \mathrm{char}\,\mathcal{F} = \mathrm{char}\,\mathcal{F}_0$

No.

DATE

目次 1. 特異台と局所非輪状性

2. 特性サイクルとMilnor公式(特徴づけ)

3. Swan導手の平坦性

4. vanishing topos (存在証明)

5. 分岐理論

6. 曲面の場合

7. pull-backの公式 ($\mathrm{Char}\, h^*\mathcal{F} = h^! \mathrm{Char}\, \mathcal{F}$)

8. 指数公式

9. $\mathcal{F}$-横断性

1. 特異台と局所非輪状性

1.1 C横断性

$$\begin{array}{c} C \\ \mathcal{F}\ \ X \leftarrow W \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

k:体 X/k smooth $C \subset T^*X$ closed conical

定義1.1 $h: W \to X$ k上のsmooth schemeの射

1. $w \in W$ hがwでC-横断的であるとは

$$h^*C = W \times_X C$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \cap & & \\ K & \subset & W \times_X T^*X & \xrightarrow{dh} & T^*W \\ \| & & & & \\ dh^{-1}(T^*_W W) & & & & \end{array}$$

$dh^{-1}(T^*_W W)$: conical とすると、

$\uparrow$ 0-section

$(h^*C \cap K) \times_W W \underset{\text{subset}}{\subset} \overset{\text{0-section}}{\{0\}}$ となることをいう

2. h が C-横断的とは $h^*C \cap K \underset{\text{subset}}{\subset}$ 0-section

例 (=問題)

$D \subset X$ $\underset{\sim}{\text{上の}}$ 単純正規交叉因子

i.e. $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ 既約成分

${}^{\forall} I \subset \{1, \dots, m\}$ $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i = \overset{\text{fiber 積}}{\prod_{i \in I \, X}} D_i \subset X$.

D_I : $\underset{\sim\sim\sim}{\text{上 smooth}}$ $D_I \subset X$ $\mathrm{codim} = |I|$.

$C \subset T^*X$ を $C = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, m\}} T^*_{D_I} X$ で定める

$h : W \to X$ が C-横断的

$\iff$ $D_i \times_X W \subset W$ 上 smooth な W の divisor で

$D \times_X W \subset W$ 上の単純正規交叉因子

命題 1.2

1. C-横断性は開条件

i.e. $\{w \in W \mid h \text{ は } w \text{ で } C\text{-横断的}\} \underset{\text{開集合}}{\subset} W$

2. $h : W \to X$ が C 横断的なら

$dh : W \times_X T^*X \to T^*W$ は h^*C 上 $\underline{\text{有限}}$ //

No.

DATE

一般に $X \xrightarrow{f} Y$ Noether scheme の射に対し、

$\overset{\cup}{Z}$ 開集合

f が Z 上有限 とは Z を Y の開部分スキームと
みたとき $f|_Z : Z \to Y$ が有限. ↑負方にならない
proper ... proper

証明

1. complement $= \{ w \mid \underset{\substack{\uparrow \\ \text{closed conical}}}{\underline{(h^*C \cap K)}} \times_W w \not\subset \{0\} \}$ が
開をいいたい。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(h^*C \cap K) & \subset & \mathbb{P}(W \times_X T^*X) \\ \downarrow & & \downarrow \text{proj.} \\ 像 & \subset & W \end{array}$$

開の像は開

2. $h : W \to X$
$g \searrow \quad \nearrow$ projection $\Rightarrow$ h が imm としてよい.
$\quad W \times X$
g = graph

$$0 \to T^*_W X \to W \times_X T^*X \twoheadrightarrow T^*W \to 0$$
$T^*_W X = K$, affine

$h^*C \cap K \subset 0$-section

$\mathbb{P}(h^*C \cap K) = \phi$.

$\mathbb{P}(K) \subset \mathbb{P}(W \times_X T^*X)$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \\ \mathbb{P}((W \times_X T^*X) \oplus \mathbb{A}^1_W) & \cdots\cdots & \mathbb{P}(T^*W \oplus \mathbb{A}) \\ \cup & & \cup \\ W \times_X T^*X & \longrightarrow & T^*W \end{array}$$

$\mathbb{P}(K)$ での blow-up

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(C'\oplus\mathbb{A}^1_W) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{P}((W\times_X T^*X)\oplus\mathbb{A}^1_W) \arrow[r, "proj"] & \mathbb{P}(T^*W\oplus\mathbb{A}^1_W) \\
& C'\subset W\times_X T^*X \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & T^*W \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}(C'\oplus\mathbb{A}^1_W)$

$\mathbb{P}(C'\oplus\mathbb{A}^1_W)\cap\mathbb{P}(K)=\phi$

$C'=h^*C\cap K$

これは $\mathbb{P}(C'\oplus\mathbb{A}^1_W)$ 上 proper

$W\times_X T^*X\to T^*X$ は

$\mathbb{P}(C'\oplus\mathbb{A}^1_W)\cap(W\times_X T^*X)=C'$ 上 proper.

proper + affine $\Leftrightarrow$ finite //

h が C-横断的なとき

$$\begin{tikzcd}
h^*C=W\times_X C \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & h^\circ C \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
W\times_X T^*X \arrow[r] & T^*W
\end{tikzcd}$$

像：閉集合

定義 1.3 $f: X\to Y$ k 上の smooth scheme の射

$C\subset T^*X$ closed conical subset

1. $x\in X$ f が x で C-横断的とは

$$\begin{tikzcd}
df^{-1}(C) \arrow[d, phantom, "\cap"] & C \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
X\times_Y T^*Y \arrow[r, "df"] & T^*X
\end{tikzcd}$$

とすると、

$df^{-1}(C)_x$ が $\subset\{0\}$ となることをいう

2. f が C-横断的とは $df^{-1}(C)\subset$ 0-section となることをいう.

例1（＝問題）

$D\subset X$ 上正規単純交叉因子

$C=\bigcup_I T^*_{D_I}X \subset T^*X$

$f: X\to Y$ が C-横断的

$\Leftrightarrow$ $f: X\to Y$ が smooth かつ

D は Y 上単純正規交叉因子

$(D=\cup D_i,\ D_I\to Y$ smooth, reldim $=$ reldim $X-|I|)$

定義1.3の続き

3. $X \xleftarrow{h} W \xrightarrow{f} Y$ が C-横断的とは
   (h: localization)

$h: W\to X$ が C-横断的 かつ

$f: W\to Y$ が $h^\circ C$-横断的なことをいう

問題

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"'] & W \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

h: C-横断的なら

$h\circ g$: C-横断的 $\Leftrightarrow$ g: $h^\circ C$-横断的

を示せ.

1.2 局所非輪状性

Milnor fiber　$f: X \to S$ scheme の射

x　X の geometric point

ここでは X の点 x_0 の剰余体の分離閉包 の Spec

$X_{(x)}$ strict localization

$= \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{sh}_{X,x_0}$ ← strict henselization at x

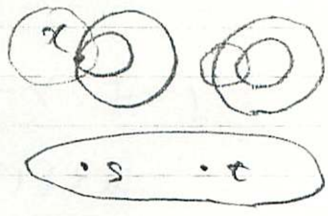
x の像 s: S の geometric pt.

$$\begin{array}{ccccc} x & \to & x_0 & \in & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & \to & s_0 & \in & S \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{c} X_{(x)} \\ \downarrow \\ S_{(s)} \leftarrow t \end{array}} : \text{geometric point}$$

$x \leftarrow t$ とかく

$$\begin{array}{ccc} X_{(x)} & \leftarrow & X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(x)} & \longleftarrow & t \end{array}$$

Milnor fiber



S = trait = Spec d.v.r.　s: geom. closed pt

t: geom. gen. pt

$\mathcal{F}$: X 上の層

No

DATE

classical nearby cycle $\Psi(\mathcal{F})$

$S = S_{(s)}$ とする.

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_t = X \times_S t \arrow[l, "j"'] \arrow[d] \\ s \arrow[r] & S & t \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\Psi(\mathcal{F}) = i^* Rj_* j^* \mathcal{F}.$$

x: geom. pt

$$\Psi(\mathcal{F})_x = R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t,\ \mathcal{F}|_{X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t})$$

(classical) nearby cycle complex の stalk

= Milnor fiber の cohomology
(tube)

定義 2.1 $f: X \to S$ scheme の射
$\mathcal{F}$: X 上の constructible complex

1. $f: X \to S$ が $\mathcal{F}$ に関して局所非輪状的で
あるとは すべての $x \in t$ に対し, 標準射

$$\begin{array}{l} \mathcal{F}_x \to R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t,\ \mathcal{F}|_{X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t}) \\ \shortparallel \\ R\Gamma(X_{(x)}, \mathcal{F}) \end{array}$$

pull-back

が同形であること.

2. $f: X \to S$ が $\mathcal{F}$ に関して普遍的に局所非輪状的であるとは、すべての cartesian 図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$S' = \mathbb{A}^n_S$ でよい。

に対し、f' が $g'^*\mathcal{F}$ に関して局所非輪状的であること。

quasi-finite $S' \to S$ による base change で局所非輪状性は保たれる

例

1. (=問題)

$id: X \to X$ が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyclic

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が loc. const

2. $\mathcal{F}$ が loc. const. constructible (Λ $l \nmid p$)

$\Longrightarrow$ smooth $f: X \to Y$ は $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

(smooth 射の loc. acyclicity)

3. $f: X \to S$ finite type $\mathcal{F}$: constructible

$\Longrightarrow$ $\exists\, U \subset S$ dense open s.t.

$X \times_S U \to U$ は $\mathcal{F}$ の制限に関して univ. loc. acyc. (generic loc. acyclicity SGA4½ Th. finitude

No.

DATE

4. $f: X \to Y$ smooth $D \subset X$ Y上単純正規交叉因子
smooth$/k$

$U = X - D$ $\mathcal{G}$: U上 loc. const.
Dにそって tamely ramified

$\Rightarrow$ $f: X \to Y$ は $Rj_*\mathcal{G}$ に関して loc. acyc.
j: 包

(3 a Appendix Illusie)