No.
DATE

11/13. 定理 1.2 ひきもどし

⇓ 3.1 指数公式 の dim 2 の場合

⇓ 3.1 分岐理論 の dim 2 の場合

3.1. Sing. Supp. の等式 ⊂ ⇒ =

Char. Cycle の等式.

$SS = T^*_X X \cup \bigcup_r \bigcup_x L_x$ の像

SS の加法性より r が 1 つ.

$M = \bigoplus M^{(r)}$

$M^{(r)} = \bigoplus \chi^{\oplus m(\chi)}$

$G^{r+} = 1$. $G^r \triangleleft I = G^1$ ← sing. supp は étale local より G としてよい.

center. $P = G^{1+}$

$I/P \curvearrowright G^r \in \mathbb{F}_p$-vect. sp.

≀ 乗法的

μ_m p∤m $G^{r\vee} \subset \bar{F}$-vect. sp.

同じ I 軌道の χ ⇒ L_χ は等しい.

I = G ⇒ 軌道は 1 つとしてよい.

No.

DATE

$SS \subset T^*_X X \cup L_x$ の像 $\Rightarrow$ = をいえばよい.

- $SS \subset T^*_X X \Leftrightarrow \mathcal{F}$: loc. const.
- SS の既約成分の dim = dim X

$\Rightarrow$ =

$C \subset T^*X$ closed conical

$= \bigcup_a C_a$ $\quad$ $\dim C_a = n = \dim X.$

$A = \Sigma m_a C_a$ $\quad$ $D(A)$: X の因子 $= \Sigma m_a [B_a]$ (codim $B_a = 1$)

$B_a \subset X$: C_a の base (closed subset)

$\mathbb{P}(A) = \Sigma m_a \mathbb{P}(C_a)$ $\quad$ $\mathbb{P}(C_a) \subset \mathbb{P}(T^*X) \xrightarrow{\pi} X$

$D(A) = \pi_* \mathbb{P}(A) = \sum_{\mathrm{codim} B_a = 1} m_a [\mathbb{P}(C_a) : B_a][B_a]$

$\dim B_a = n \Rightarrow C_a = B_a = X \Rightarrow \mathbb{P}(C_a) = \phi$

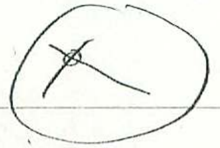
codim $B_a > 1 \Rightarrow \mathbb{P}(C_a) \to X$ gen. fin. でない

$\pi_*(C_a) = 0.$

codim $B_a = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(C_a) \to X$ gen. finite

$\pi_*(C_a)$ は B_a の1以上の定数倍

(X : 2次元) $D(CC(\mathcal{F}))$



$X \supset D = \bigcup_i D_i$ D: smooth div $U = X - D$

$\mathcal{F}$: X 上の constructible sheaf $n = \dim X$

$\mathcal{F}|_U$, $\mathcal{F}|_D$ loc. const

$$CC'\mathcal{F} = (-1)^n \Big(\mathrm{rk}\,\mathcal{F} \cdot [T^*_X X]$$
$$+ \sum_i \big(-\mathrm{rk}\,\mathcal{F}|_{D_i} [T^*_{D_i} X]$$
$$+ (\text{tame part の rk}) \cdot [T^*_{D_i} X]\big)$$
$$+ \sum_{r>1} \sum_x \frac{r \cdot m(x)}{[D_x : D_i]} \pi_{x*}[L_x] \Big)$$

$D(CC'(\mathcal{F})) = \mathrm{art}(\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ の Artin divisor

例 X: curve

$$D(CC'(\mathcal{F})) = \sum_{x \in D} \mathrm{art}_x(\mathcal{F}) \cdot [x]$$

命題 3.2 (定理 2.1, 3.1 は使わない (Deligne))

X: proj. smooth, $\dim X = 2$

$$\chi(X, \mathcal{F}) - (CC(\mathcal{F}), T^*_X X)$$
$$= -2(\mathrm{art}(\mathcal{F}) - D(CC(\mathcal{F})), H)$$

が任意の (very ample な) divisor H について成り立つ

$CC\mathcal{F}| = CC'\mathcal{F}|$ 有限個の点をのぞけば

定理3.1 $\Rightarrow$

No.

DATE

証明 定理2.1の証明の方針をなぞる.

$$\begin{array}{ccc} H & X \hookrightarrow \mathbb{P} & \\ & \uparrow & \\ & X' \to L & \text{を使って} \end{array}$$

$i : H \hookrightarrow X$

$X \cap A_L$ 有限.

$\chi(X, \mathcal{F}) = \cdots = \boxed{\chi(H, \mathcal{F})}$

$(cc(\mathcal{F}), T^*_X X) = \cdots = \boxed{(i^! cc(\mathcal{F}), T^*_H H)}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad cc(i^*\mathcal{F})$

同じ計算で

$\chi(X, \mathcal{F}) - (cc(\mathcal{F}), T^*_X X)$

$= 2(\chi(H, \mathcal{F}) - (i^! cc(\mathcal{F}), T^*_H H))$

命題3.2 ⇒ 定理3.1.2の $\dim X = 2$ の場合.

右辺は H によらないので 0.

(H: very ample ⇒ $2H$: very ample)

$\therefore \chi(X, \mathcal{F}) = (cc(\mathcal{F}), T^*_X X)$ (定理2.1の $\dim X = 2$ の場合)

$\mathrm{art}(\mathcal{F}) - D(cc(\mathcal{F}))$ は数値的に0と同値

$\Updownarrow$ def

任意の因子と交点数

D：既約 + smooth

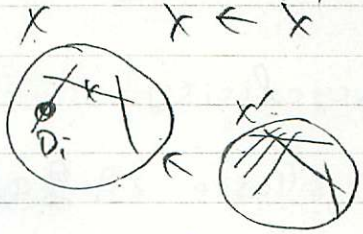
CC($\mathfrak{F}$)の加法性 ⇒ r：1コ，L_x：1コとしてよい.

∴ art($\mathfrak{F}$) = D(CC($\mathfrak{F}$)) をいえばよい

X：proj. smooth surface
∪
U = X − D　Dがもし既約ならOK.

(∵ H: very ample ⇒ (D, H) ≠ φ)

D = ∪ D_i　D_i の art($\mathfrak{F}$)，D(CC($\mathfrak{F}$)) の係数が等しいことを示す。



X ← X′ finite gen. étale covering.

D_i の gen. の近傍では不分岐.

それ以外では $\mathfrak{F}|_U$ の D_i に沿った分岐を消す (in X′)

X′は近似定理より存在.

X′は normal だが smooth とは限らない

$X \leftarrow X' \leftarrow Y$　resolution of singularity

π　$\mathfrak{F}_Y$　art($\mathfrak{F}_Y$) − D(CC($\mathfrak{F}_Y$))

数値的に0.

D_1 ‥‥ では art($\mathfrak{F}_Y$) − D(CC($\mathfrak{F}_Y$)) の引きもどし (étale だから)

D_i ‥‥ では係数一致 (分岐を消したから)

$H \subset X$ very ample

$$(\mathrm{art}(\mathcal{F}_Y) - D(CC(\mathcal{F}_Y)), \pi^* H) = 0$$

$$(\pi_* (\mathrm{art}(\mathcal{F}_Y) - D(CC(\mathcal{F}_Y)), H) = 0$$

左辺 = 手との $(\mathrm{art}(\mathcal{F}) - D(CC(\mathcal{F}))$ の D_1 部分, $H)[Y, X]$

残っていること

・Swan 導手の平坦性 $\Longleftrightarrow$ 特性サイクルの存在

$\Downarrow$

・定理1.2の証明 ($\Leftarrow$ 定理3.1.2の $\dim X$)

4. Vanishing topos と Swan 導手の平坦性

4.1 nearby cycle と local acyclicity

oriented product $X \overleftarrow{\times}_S Y$ Illusie 2月集中講義

$X \to S \leftarrow Y$ topos の射

$T \to X \overleftarrow{\times}_S Y$ oriented product … topos

$$\begin{array}{ccc} T & \to & Y \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ X & \to & S \end{array}$$

No.

DATE

$X \to S \leftarrow Y$ scheme の 像 : $X \overleftarrow{\times}_S Y$ étale topos

vanishing topos : $Y := S$ $\quad X \overleftarrow{\times}_S S$

$$\begin{tikzcd} X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[d, "pr_1"] \\ x \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

の fiber $x \overleftarrow{\times}_S S = S_{(p)}$ strict localization

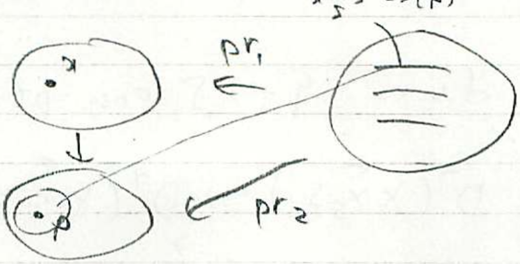
geom. pt

($k(x)$: sep. closed)

p : x の 像 (S の geom. pt)

$x \overleftarrow{\times}_S S = S_{(p)}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[d, "に近似"] \\ X \times_S TS \quad T_p S \arrow[d] \\ X \ni x \end{tikzcd}$$

$X \overleftarrow{\times}_S S$ の 点 $\cdots$ ($x \to X$ と $S_{(p)} \leftarrow t$ geom. pt. の 組)

$\quad\quad ||$

$\quad (x \leftarrow t)$

$f : X \to S$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi_f"] & X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & S \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ψ_f :
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

$\Lambda \quad D^+(X) = D^+(X, \Lambda) \quad D^+(X \overleftarrow{\times}_S S)$

$p_1^*, R\Psi_f : D^+(X) \to D^+(X \overleftarrow{\times}_S S)$

↖ nearby cycle functor

$\mathcal{F} \in D^+(X)$

$$R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow t} = R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(s)}, \mathcal{F}|_{X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(s)}})$$

↑ stalk

↑ Milnor tube (= Milnor fiber)

$$R\Psi_f \mathcal{F}|_{x \overleftarrow{\times}_S S} = Rf_{(x)*} \mathcal{F}|_{X_{(x)}} \qquad f_{(x)} : X_{(x)} \to \underset{x \overleftarrow{\times}_S S}{\underset{\in}{\underset{\|}{S_{(s)}}}}$$

S : hensel d.v.r. $\eta \to S$ gen. pt

$$\begin{tikzcd} D^+(X) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "R\Psi_f"'] & D^+(X \overleftarrow{\times}_S S) \arrow[r] & D^+(X_s \overleftarrow{\times}_S \eta) \arrow[r, "\bar\eta"] & D^+(X \times_S \bar\eta) \end{tikzcd}$$

$X_{\bar{s}}$ ‖

$R\Psi_\eta$: classical nearby cycle functor (SGA 7 XIII)

$$R\Phi_f : D^+(\Lambda) \to D^+(X \overleftarrow{\times}_S S)$$

vanishing cycle functor $\qquad pr_1^* \to R\Psi_f \to R\Phi_f \to$ dist. triangle

補題 1.1. 次は同値.

(1) $f : X \to S$ は $\mathcal{F}$ に関して loc. acyclic.

(2) $pr_1^* \mathcal{F} \to R\Psi_f \mathcal{F}$ は同形 ($\Leftrightarrow R\Phi_f \mathcal{F} = 0$)

かつ $R\Psi_f \mathcal{F}$ の構成が任意の finite base change と可換.

No

DATE

$$\begin{tikzcd} X & X_T \arrow[l] \arrow[d] \\ S \arrow[from=1-1, d] \arrow[ur, phantom, "\square"] & T \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rrr, bend left] \arrow[d, phantom, "\downarrow"] & X \arrow[d] & X_T \arrow[l] \arrow[d, "f_T"] & \mathcal{F}_T \\ & X \times_S S & X_T \times_T T \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

$$R\Psi_f \mathcal{F} \longrightarrow R\Psi_{f_T} \mathcal{F}_T$$

$S \nearrow$

ひきもどし