$f: W \to Y$　$Y$: curve, $u$: isol. char. pt

に対し、

$$CC(R\Psi_f i^*\mathcal{F}) = f_! i^! CC(\mathcal{F}) \quad \text{(0-section を除く)}$$

を示せばよい。(∵ Milnor 公式)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "g"] & (\mathcal{F}) \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z & \end{tikzcd}$$

(F)　dim 1　dim 2

$CC(R\Psi_f i^*\mathcal{F})$ ― base change と可換

$\quad \|$

$CC(h^*R\Psi_g \mathcal{F})$:

$$f_! i^! CC(\mathcal{F}) = h^! g_! CC\mathcal{F}.$$

$$= h^! CC(R\Psi_g \mathcal{F})$$

命題4.3.2

$$CC(h^*R\Psi_g \mathcal{F}) \overset{?}{=} h^! CC(R\Psi_g \mathcal{F})$$

<u>今後記述</u>

12/11　pull-back 公式

$i: W \to X$ smooth div. properly $C$-trans

$C \supset SS(\mathcal{F})$

$$CC(i^*\mathcal{F}) = i^! CC(\mathcal{F})$$

$i^! CC(\mathcal{F})$ が $i^*\mathcal{F}$ に関して Milnor 公式をみたすことを示せばよい。

No.

DATE

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "g"] \\ Y \arrow[r, dashed, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

があったとすると $\underset{①}{CC\,h^* R\Psi_g \mathcal{F}} = \underset{②}{h^! CC\,R\Psi_g \mathcal{F}}$ に帰着

① $X \subset \mathbb{P}$　$W = X \cap H$ hyperplane section としてよい

$$\underset{H \in \text{proj. sp.}}{\overset{\cap}{W}} = X \cap \overset{\uparrow}{H}$$

$f = p_L : W \to L \underset{H^\vee}{\overset{\cap}{}}$ としてよい。

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee) & \mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E) & E_H \subset F \leftrightarrow 3\text{次元部分空間} \\ \cup \qquad \cup & \Downarrow & \qquad \downarrow \\ H = \mathbb{P}(E_H^\perp) & H \longleftarrow E_H \subset E \text{ line} & \\ & H^\vee = \mathbb{P}(E/E_H) \supset L \leftrightarrow 2\text{次元部分空間} & \subset E/E_H \end{array}$$

$E \supset$ 3次元部分空間 $\to E/E_H$

$P(=Z) = \{F\text{の}2\text{次元部分空間}\} = Gr(2,F) \subset G = Gr(2,E)$

$\cup h \qquad\qquad\qquad \cup \qquad\qquad\qquad = \mathbb{P}(F^\vee) \simeq \mathbb{P}^2$

$L(=Y) = \{\quad \text{〃} \quad \text{で} E_H \text{を含むもの}\}$

$$\begin{array}{cccccc} x \in & X & \to & X \times_{\mathbb{P}} A & \supset & X \cap A_{L'} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x \in A_{L'} & P & \to & G = \{L' \subset \mathbb{P}^\vee \mid \text{line}\} & \ni & L' \end{array}$$

をみたす $L'$

No.

DATE

② 3節定理3.1 dim = 2 の場合

↑

分岐理論によるCCの記述

⇑

仮定 … が non-degenerate

universal family を考える (Milnor公式の証明の類似)

$$\begin{tikzcd} Z(\tilde{C}) \subset (X \times \mathbb{G})^{\triangledown} \arrow[r] \arrow[dr, "\text{s.f.}"'] & \mathbb{D} \arrow[d] \\ & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

pencil が定める射の univ. family

dense open では定義

平坦性 ⇒ 全体

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ L \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

の universal family ∈ Flag var. 上の family

〃

$H \in L \subset \mathbb{P}^{\vee} = \mathbb{P}(E)$

$\boxed{\text{dense open 上の分岐理論による記述}}$

全体　　　平坦性

---

定理 (Beilinson) 特性サイクルは $\mathbb{Z}$ 係数

証明 $C = \bigcup_a C_a$ Milnor公式より

各既約成分の smooth な点 $(u, \omega) \in C_a \subset T^*X$

に対し, $f : X \to \mathbb{A}^1$ で $df$ が $C_a$ と $(u, \omega)$ で

transversal に交わるものを見つければよい.

$CC(\mathcal{F}) = \sum m_a C_a$

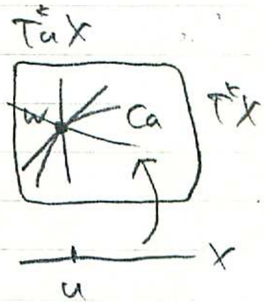
$$\underbrace{(CC(\mathcal{F}), df)}_{\substack{\| \\ -\mathrm{dimtot} \in \mathbb{Z}}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}}{m_a} \underset{\substack{\| \\ 1}}{(C_a, df)_u}$$

Hasse-Arf.

$df(u) = w$ となる $f$　$u$ での局所座標 $(x_i)$

$w = \sum a_i dx_i$　$f = \sum a_i x_i$　$df = \sum a_i dx_i$

この $f$ を修正




$W = T_{(u,w)}(T^*X)$　$\dim = 2n$　$n = \dim X = \dim C_a$

$\cup$　　$\cup$

$T = T_{(u,w)} C_a$　$V = T_{(u,w)}(df(X))$

$\| \; df_* T_u X$

transversal $\Longleftrightarrow T \cap V = 0$

$T^*X$ の basis $(dx_i) = (p_i)$

$W$ の basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$

$df = \sum \partial_i f \cdot dx_i = \sum \partial_j f \cdot p_j$

$T_u X$ の basis $(\partial_i)$　$V = (H_f = (\partial_i \partial_j f)$ の graph$)$

$df_* : T_u X \to T_{(u,w)}(T^*X) = W$

$\partial_i \longmapsto \left(\partial_i, \sum_j \partial_i \partial_j f \frac{\partial}{\partial p_j}\right)$

No.

DATE

$f \rightsquigarrow f + \sum b_{ij} x_i x_j = g \qquad B = (b_{ij})$

$$H_f + (b_{ij} + b_{ji}) = H_g$$

$$\underset{B + {}^tB}{\underbrace{(b_{ij}+b_{ji})}}$$

補題1. $V$ 有限次元線形空間 $W = V \oplus V^\vee$

$T \subset W \quad \dim T = \dim V \quad V_1 = V \cap T$ とおく.

次の条件をみたす直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$ が存在する

任意の非退化な双線形形式 $A : V_1 \to V_1^\vee$ に対し,

$V'' = A$ の graph $\oplus V_2 \subset W$ とおくと

$$\underset{V_1 \oplus V_1^\vee}{\cap} \qquad \underset{V_2 \oplus V_2^\vee}{\cap}$$

$V'' \cap T = 0$ (かつ $V'' \cap V' = 0$) である

補題2. $\dim V$ even or $p \neq 2$ ならば

$A = B + {}^tB$ が非退化対称形式となる

双線形形式 $B : V \to V^\vee$ が存在する.

(上の $V_1$ に適用)

補題1 + 補題2 $\Rightarrow$ 定理

$B = (b_{ij})$ を補題を $V_1$ に適用してえられるものとして

$f$ を $f + \sum b_{ij} x_i x_j$ でおきかえればよい.

(ただし $p \neq 2$ or $\dim V_1$ even なら)

No.

DATE

$p=2$ かつ $\dim V_1$ : odd のとき

$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & X \times \mathbb{A}^1 \\ \mathcal{A} & & pr_1^* \mathcal{A} \end{array}$ として $\dim V_1$ : even となるようにする.

補題2 $p \neq 2$ なら $B$ 非退化対称 $B + {}^tB = 2B$

$p=2$ $\dim V$ even $A = B + {}^tB$ は交代形式

$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ $B + {}^tB = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$

補題1 $T \subset W \to V^\vee$ の像 $\bar{T}$ の $\dim \bar{T} = \underset{\underset{\dim T}{\parallel}}{\dim V} - \dim V_1$

$V_1 = V \cap T \subset V$ の零化空間 $V_2' \subset V^\vee$

$\dim V_2' = \dim V - \dim V_1$

よって $V^\vee$ の直和分解 $V^\vee = V_1' \oplus V_2'$ で

$V_1' \cap \bar{T} = 0$ となるものがある

$V^\vee = V_1' \oplus \underset{\underset{V_1^\perp}{\parallel}}{V_2'}$ に対応する分解を $V = V_1 \oplus V_2$ とする.

$A : V_1 \to V_1^\vee = V_1'$ 同形として $V' \cap T = 0$ を示す

$\uparrow$ $\nearrow$

$\dim = \dim V$

$V \subset V' + T = W$ をいえばよい.

$\quad\quad\quad\cup$

$V_1 = V \cap T$ $\quad V' + V_1 = V_1^\vee \oplus \underbrace{V_1 \oplus V_2}_{\parallel \atop V}$

$V''+T$ の $W/V$ での像が全体をいえばよい
$\downarrow$
$V_1'+T$ // //

$\mathcal{F}$-transversality

$f: X \to Y$ C-transversal $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyclic.
$h: W \to X$ C-transversal $\Rightarrow$ $h: W \to X$ が $\mathcal{F}$-transversal

定義 $\mathcal{F}$ $X$ 上 constructible cpx $h: W \to X$ scheme の射 が $\mathcal{F}$-transversal とは標準射 $h^*\mathcal{F} \otimes Rh^!\Lambda \to Rh^!\mathcal{F}$ が同形であること.

例 1. $h$: smooth $\Rightarrow$ $h$ は $^\forall\mathcal{F}$-transversal
Poincaré duality

2. $\mathcal{F}$: loc. const $\Rightarrow$ $^\forall h$ は $\mathcal{F}$-transversal

$\mathcal{F}$: perverse sheaf $X, W$: smooth とする
$h: W \to X$ が $\mathcal{F}$-transversal $\Rightarrow$ $h^*\mathcal{F}[\dim W - \dim X]$ は perverse.

定理 $X/k$ smooth $k$ 完全体 $\Lambda$ 体

$C \subset T^*X$ closed conical subset に対し、次は同値.

(1) $C \supset SS(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ micro-supp on $C$)

(2) $\forall h: W \to X$ $k$上の smooth sch の射に対し、

$h$ が $C$-transversal $\Rightarrow$ $h$ は $\mathcal{F}$-transversal

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $W \xrightarrow{g} W \times X \xrightarrow{p_2} X$

$$\begin{array}{ccc} h: C\text{-trans} & \Rightarrow & h: \mathcal{F}\text{-trans} \\ \Updownarrow & \uparrow & \Uparrow \\ g: p_2^*C\text{-trans} & \Rightarrow & g: p_2^*\mathcal{F}\text{-trans} \end{array}$$

$h$ は closed imm としてよい.

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow f \ \text{smooth} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \end{array}$$

$W \to X$ $C$-transversal $\Rightarrow$ $X$ と $W$ の近傍でおきかえて

$f: X \to Y$ が $C$-transversal

としてよい.

(1)より $\mathcal{F}$ は loc. acyc. rel. to $\mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{h} & \overset{\mathcal{F}}{X} & \xleftarrow{j_U} & U \\ \downarrow & \square & \downarrow f & \square & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xleftarrow{j_V} & V \end{array}$$

closed | open

smooth

Illusie App to Th. finitude SGA$4\frac{1}{2}$

$\mathcal{F} \otimes f^* Rj_{V*}\Lambda \to Rj_* j^* \mathcal{F}$ は同形

$\quad \| \text{ sm.b.c.}$

$Rj_*\Lambda$

$\to h_* Rh^! \to \mathrm{id} \to Rj_* j^* \to$ dist. tri. //

No.

DATE

(2) ⇒ (1) $\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ y \in Y \text{ curve} \end{array}$ f: C-transversal ⇓ f: loc. acyc. rel to $\mathcal{F}$ を示す.

geom. pt on a closed pt.

base $C \supset$ base $SS\mathcal{F} = \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$

C-trans. ⇒ base C の近傍では smooth なので

f は smooth curve $\quad Y_{(y)} = \varprojlim_{\substack{y \in Y' \\ \to Y \text{ étale nbd}}} Y'$

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "i_y'"] \arrow[d] & X' = X \times_Y Y' \arrow[d, "f'"] & X'_V \arrow[l, "j_V'"'] \arrow[d] \\ y \arrow[r] & Y' & V \arrow[l] \end{tikzcd}$$

C-trans.

$$\begin{array}{ccc} \Psi_y \mathcal{F} & = & i_y'^{*} Rj_{V*} \mathcal{F}|_{X'_V} \\ \uparrow & & \uparrow\wr \\ i_y^* \mathcal{F} \otimes \Psi_y \Lambda & = & i_y^* \mathcal{F} \otimes i_y'^{*} Rj_{V*} \Lambda \\ \parallel & & \\ \Lambda & & \end{array}$$

← f が smooth なので smooth 射の loc. acyclicity

f' が C-trans
⇓
$i_y'$ が C-trans
⇓ (2)
$\mathcal{F}$-trans
+ dist. tri.

$i_y^* \mathcal{F} \to \Psi_y \mathcal{F}$ が同型 (loc. acyc.) (1) //