NO

DATE

問題 $i: X \hookrightarrow \mathbb{P} \underset{\substack{\text{Veronese} \\ d \geq 3}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}'$ とすると，(E)はみたされる．

(C)は $i: X \to \mathbb{P}$: open imm かつ Supp $\mathcal{F} = X$ の

場合をのぞけばみたされる

10/9 特性サイクルの構成

$i: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ immersion

$C = \bigcup C_a \subset T^*X \leftarrow X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}$ $\quad \underset{\text{ここを決める}}{\Sigma\, \underbrace{m_a} C_a}$

$(\supset SS(\mathcal{F})) \quad \tilde{C}$

$X \times_{\mathbb{P}} Q = \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}) \supset \mathbb{P}(\tilde{C}) = \bigcup \mathbb{P}(\tilde{C}_a)$

Beilinson :

$p^\vee : X \times_{\mathbb{P}} Q \longrightarrow \mathbb{P}^\vee$ が $p^*\mathcal{F}$ に関して univ. loc.

acyc. となる最大の開集合の補集合 $\mathbb{P}(\widetilde{SS(\mathcal{F})})$

命題 9.1 $p^\vee : X \times_{\mathbb{P}} Q \to \mathbb{P}^\vee$ が $p^\circ C$-transversal $\quad \xrightarrow{\text{smooth}} p \nearrow X$

となる最大の開集合は $\mathbb{P}(\tilde{C})$ の補集合

証明 $\qquad p^* C = (X \times_{\mathbb{P}} Q) \times_X C = p^\circ C$

$(X \times_{\mathbb{P}} Q) \times_{\mathbb{P}^\vee} T^*\mathbb{P}^\vee \xrightarrow{dp^\vee} T^*(X \times_{\mathbb{P}} Q)$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad \|$

$X \times_{\mathbb{P}} Q = Q \cap (X \times_k \mathbb{P}^\vee)$

$\mathrm{Coker}(\underset{\text{line bdle}}{\boxed{T^*_{X \times_{\mathbb{P}} Q}(X \times \mathbb{P})}} \to ((\underbrace{X \times_{\mathbb{P}} Q) \times_X T^*X}_{p^*C} \oplus \boxed{(X \times_{\mathbb{P}} Q) \times_{\mathbb{P}^\vee} T^*\mathbb{P}^\vee})$ injection

No.

DATE

$$\begin{tikzcd} X\times_{\mathbb{P}} Q \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X\times\mathbb{P}^\vee \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

$T^*\mathbb{P}^\vee = T^*(X\times\mathbb{P}^\vee)/X$

relative cotangent b'dle

$\exists\, \gamma \longmapsto (\alpha, \beta)$?

$$\begin{tikzcd} T^*_{X\times_{\mathbb{P}}Q}(X\times\mathbb{P}^\vee) \arrow[r] & (X\times_{\mathbb{P}}Q)\times_X T^*X \supset p^*C \\ (X\times_{\mathbb{P}}Q)\times_Q \underline{T^*_Q(\mathbb{P}\times\mathbb{P}^\vee)} \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Omega"] & (X\times_{\mathbb{P}}Q)\times T^*\mathbb{P} \supset p^*\hat{C} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

univ. sub. line b'dle $\qquad \mathbb{P}(X\times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P})$

pencil $\quad L \subset \mathbb{P}^\vee = \{ H \mid H \subset \mathbb{P} \text{ hyperplane} \}$

line

$$\begin{tikzcd} p^\vee : X\times_{\mathbb{P}}Q \arrow[r] & \mathbb{P}^\vee \\ p_L : X_L \arrow[u, phantom, "\subset"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & L \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$A_L \quad L$の軸 $= \bigcap_{H\in L} H = H_0 \cap H_\infty \quad 0 \neq \infty \in L$

$\cap$

$\mathbb{P}$ 余次元2の線形部分多様体

$A_L \cap X$ が proper に交わるなら

X_L は X の $A_L \cap X$ での blow-up

$X_L^\circ = X - X\cap A_L \subset X_L$ open

$p_L^\circ : X_L^\circ \to L \quad p_L$の制限

$x \longmapsto x$を含みLの元であるただ1つの超平面 L

命題4.2 $X_C^\circ \cap \mathbb{P}(\check{C})$ $(\subset X \times_{\mathbb{P}} Q)$ は

$p_C^\circ : \overset{C^X}{X_C^\circ} \to L$ が C-transversal になる最大の

開集合の補集合. $^{\wedge}\mathrm{Cl}_{X_C}$

補題4.3 $V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} X$ は k 上の smooth schemes の射

h: C-transversal とすると,

$h \circ g$ が C-transversal $\iff$ g が $h^\circ C$-transversal.

補題4.4
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ Y & V \arrow[l] \end{tikzcd}$$
k 上の smooth schemes の cartesian な図式で

横の射は reg. imm. で codim が等しいとすると,

次は同値.

(1) $f : X \to Y$ は W の近傍で C-trans.

(2) $h : W \to X$ は C-trans. かつ g は $h^\circ C$-trans.

補題4.3 + 4.4 $\Rightarrow$ 命題4.2.

open imm $\Rightarrow$ C-trans.

$$\begin{tikzcd} X & (X \times_{\mathbb{P}} Q)^\circ \arrow[l, "p"'] \arrow[d] & X_C^\circ \arrow[l] \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "p^\circ C"'] \\ & \mathbb{P}^\vee & L \arrow[l] \end{tikzcd}$$

smooth C-trans　　$p^\circ C$-trans　　補題4.3.

命題4.1 $\mathbb{P}(\check{C})$ $\xleftrightarrow[4.4]{}$ 4.2 $X_C^\circ \cap \mathbb{P}(\check{C})$

補題4.3の証明は演習問題

補題4.4の証明

$$
\begin{tikzcd}
 & & h^{*}C \arrow[d, phantom, "\cap"] & h^{\circ}C \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
0 \arrow[r] & T^{*}_{u}X \arrow[r] & W\times_{X}T^{*}X \arrow[r] & T^{*}W \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & W\times_{U}T^{*}_{U}Y \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cong"] & W\times_{Y}T^{*}Y \arrow[r] \arrow[u] & W\times T^{*}V \arrow[r] \arrow[u, "(2)\ 逆像\subset(0)"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

(2) 逆像 $\subset (0)$　　(1) 逆像 $\subset (0)$

//

$p_L^{\circ}: X_L^{\circ} \to L$ の isolated char pt

$\qquad\qquad \|$

$X_C^{\circ} \cap \mathbb{P}(\check{C})$ の孤立点

$(CC(\mathcal{F}), dp_L^{\circ})_{T^{*}X,u}$ （交点数）の計算

$A = \sum m_a C_a$ 　　$\mathbb{P}(\hat{A}) = \sum m_a \mathbb{P}(\check{C}_a)$ 　$X\times_{\mathbb{P}} Q$ の余次元 n の cycle

dim n 　　codim n

補題4.5

$u \in p_L^{\circ}: X_L^{\circ} \to L$ の孤立特異点とすると

$$(A, dp_L^{\circ})_{T^{*}X,u} = (\mathbb{P}(\hat{A}), X_L)_{X\times_{\mathbb{P}}Q,u}$$

交点数

証明　$A = C_a = C$ としてよい

$$(C, dp_L^{\circ})_{T^{*}X,u} = (\mathbb{P}(C), \overline{dp_L^{\circ}}) = (\mathbb{P}(\check{C}), \widehat{dp_L^{\circ}})_{X\times_{\mathbb{P}}Q,u}$$

$T^{*}X$ の切断　　$\mathbb{P}(T^{*}X)$ の切断　　$X_C^{\circ} \subset \mathbb{P}(X\times_{\mathbb{P}} T^{*}\ldots$

ここをいえばよい

$$\begin{array}{ccc} X_L & \to & X \times_{\mathbb{P}} Q \\ p_L \downarrow & & \downarrow p^\vee \\ L & \to & \mathbb{P}^\vee \end{array}$$

Xを$\mathbb{P}$でおきかえ

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_L^\circ & \to & Q^\circ \\ \hat{p}_L \downarrow & \square & \downarrow \\ L & \to & \mathbb{P}^\vee \end{array}$$

$\mathbb{P}_L^\circ = \mathbb{P} - A_L$

$dp_L^\circ : X_L^\circ \times_L T^*L \to T^*X_L^\circ$

$X_L^\circ = X \cap \mathbb{P}_L^\circ$

$d\hat{p}_L^\circ : \underline{\mathbb{P}_L^\circ \times_L T^*L \to T^*\mathbb{P}_L^\circ}$

$\mathbb{P}_L^\circ \hookrightarrow \mathbb{P}_L^\circ \times L$: $\hat{p}_L^\circ : \mathbb{P}_L^\circ \to L$ の graph

codim 1

univ. subline bdle であることをいえばよい。

$T^*\mathbb{P}_L^\circ \to 0$

univ. subline bdle $T^*_Q(\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee) \to Q \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}$

$0 \to \mathbb{P}_L^\circ \times_Q \underline{T^*_Q(\mathbb{P} \times \mathbb{P}^\vee)} \to (\mathbb{P}_L^\circ \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}) \oplus (\mathbb{P}_L^\circ \times_L T^*L)$ 同一視

univ. subline bdle

($\mathbb{P}$じ $\swarrow dp_L^\circ$

$\to T^*\mathbb{P}_L^\circ \to 0$

$i : X \xrightarrow{\text{imm}} \mathbb{P} = \mathbb{P}(E^\vee)$ についての条件

$\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}(1)$ $\quad \mathcal{O}(1)$ $\quad E = \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$

very ample $\quad$ 有限次元部分空間

(E) $k = \bar{k}$ $\quad \forall x \neq y \in X(\bar{k})$

$E \to \mathcal{L}_x / m_x^2 \mathcal{L}_x \oplus \mathcal{L}_y / m_y^2 \mathcal{L}_y$ は全射

$C = \bigcup_a C_a$ fix., C_a : 既約成分

(C) $\forall \hat{C}_a \subset X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}$ は 0-section に含まれない。

No.

DATE

$d \geq 1$ 自然数

$$i_{(d)} : X \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{P}(E^\vee)}}{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}(S^d E^\vee)$$

$\uparrow$ Veronese

$E \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ を $E^{(d)} = \mathrm{Im}(S^d E \to \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes d})) \subset \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes d})$ でおきかえる

($\mathcal{L}$: very ample, $\mathcal{L}^{\otimes d}$: very ample)

問題 $d \geq 3$ とすれば $E^{(d)} \subset \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes d})$ が定める imm. は条件(E)をみたすことを示せ.

$d \geq 2$ とすれば条件(C)をみたす. $(n > 0)$

$(C) \Rightarrow \mathbb{P}(\hat{C}_a) \neq \phi$.

$(E) \Rightarrow p^\vee : X \times_{\mathbb{P}} Q \to \mathbb{P}^\vee$ の $\mathbb{P}(\tilde{C})$ への制限は

$\tilde{C}$ $=$ $\cup \mathbb{P}(\hat{C}_a)$

省略 (Beilinson)

generically radicial

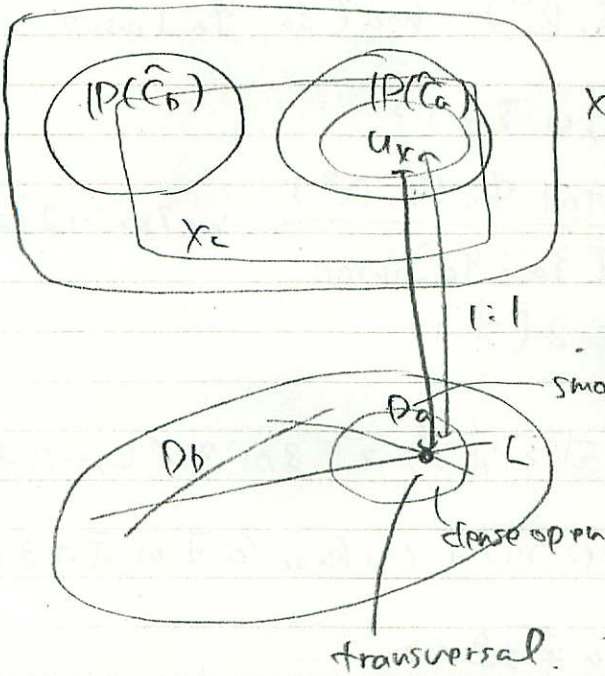
i.e. $D_a = p^\vee(\mathbb{P}(\hat{C}_a)) \subset \mathbb{P}^\vee$

$\mathbb{P}(\hat{C}_a) \to D_a$ により $\mathbb{P}(\hat{C}_a)$ の関数体は D_a の関数体の有限次純非分離拡大

であり, $C_a \neq C_b$ なら $D_a \neq D_b$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}(\hat{C}_a) & \overset{\text{codim } n}{\subset} & X \times_{\mathbb{P}} Q \\
\downarrow & & \downarrow p^\vee \leftarrow \text{fiber の次元 } n-1 \\
D_a & \underset{\text{codim} 1}{\subset} & \mathbb{P}^\vee \\
\text{divisor} & &
\end{array}$$

$CC(\mathcal{F}) = \sum \underline{m_a} C_a$　　m_a の決め方.



$p_L : X_L \to L$ の孤立特性点 u

u で Milnor 公式がなりたつように m_a を定める.

$\mathbb{P}(\hat{C}_a)$ の gen. pt ξ_a

D_a の gen. pt η_a

剰余体の拡大は純非分離

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{P}(\hat{C}_a), X_L)_{X\times_{\mathbb{P}} Q, u} \\
&\quad \| \leftarrow \text{proj. formula} \\
&(\underbrace{p_*^{\vee} \mathbb{P}(\hat{C}_a)}, L)_{\mathbb{P}^{\vee}, u} \\
&\quad \| \\
&[\xi_a : \eta_a]_{(\mathrm{insep})} (D_a, L)_{\mathbb{P}^{\vee}, u} \\
&\qquad \| \leftarrow \text{transversal} \\
&\qquad 1.
\end{aligned}
$$

$A = \sum m_a C_a$

$$
\begin{aligned}
(A, dp_L^{\circ})_{T^*X, u} &= (\mathbb{P}(\hat{A}), X_L^{\circ})_{X\times_{\mathbb{P}} Q, u} \\
&= m_a (\mathbb{P}(\hat{C}_a), X_L^{\circ})_{X\times_{\mathbb{P}} Q, u} \\
&= m_a [\xi_a : \eta_a]_{\mathrm{insep}}.
\end{aligned}
$$

Milnor公式が成り立つようにmaを定めるには

$$-\mathrm{dimtot}\,\Phi_a(\mathcal{F}, P_c^\circ) = m_a[\xi_a : \eta_a]_{\mathrm{insep}}$$

上の図のようにL, uをとると、

$$m_a = -\frac{\mathrm{dimtot}\,\Phi_a(\mathcal{F}, P_c^\circ)}{[\xi_a : \eta_a]_{\mathrm{insep}}}$$ とくなくてはならない.

$$m_a \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}].$$

一意性

- maを上の式で定義できるか？（L, uによらない？）
- 一般の射についてもMilnor公式が示せるか？

pencilのuniversalなfamily

Swan導手の平坦性