2013 年度夏学期 数理科学 I 期末試験問題

7 月 23 日 (火) 10:55–12:25 (90 分)　 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ)，計算用紙 1 枚.

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.

・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

・解き方の指定がある問題については，それ以外の方法でといた答案は**採点しません**．ほかの方法で検算するのは構いません.

・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 連続微分可能な関数 $f(x,y)$ に対し，$f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ でその偏導関数を表わす.

1. $f_x(x,y)=y^2,\ f_y(x,y)=xy$ をみたす連続微分可能な関数 $f(x,y)$ は存在しないことを示せ.

2. $A=(1,0),\ B=(0,1)$ とする．原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円のうち第 1 象限に含まれる部分を A を始点 B を終点とする曲線と考えたものを C_1 とし，線分 BA を B を始点 A を終点とする曲線と考えたものを C_2 とする．線積分 $\displaystyle\int_{C_1}(y^2dx+xydy)$ と $\displaystyle\int_{C_2}(y^2dx+xydy)$ を求めよ.

3. D を C_1 と C_2 にはさまれる部分 $x+y \geqq 1,\ x^2+y^2 \leqq 1$ とする．2. の線積分と D 上の重積分について，グリーンの公式がなりたっていることを確かめよ.

問題 2 条件 $x^2-y^2=-16,\ y>0$ のもとでの関数 x^3-45y の極値問題について，**ラグランジュ未定係数法を必ず使って**次の問 1. と 2. に答えよ.

1. 極値をとりうる点をすべて求めよ.

2. 1. で求めた各点で，極大値をとるか極小値をとるかそれとも極値をとらないか判定せよ.

問題 3 st 平面全体で定義された写像 $G(s,t)=(g(s,t),h(s,t))$ を $g(s,t)=s-t,\ h(s,t)=2st$ で定める.

1. 写像 $G(s,t)$ は，st 平面の点を直線 $s+t=0$ をのぞき，xy 平面の部分 $x^2+2y>0$ に 2 対 1 にうつすことを示せ.

2. $G(s,t)$ による閉円板 $s^2+t^2 \leqq 2$ の像 $\{G(s,t) \mid s^2+t^2 \leqq 2\}$ を求めよ.

3. 不等式 $x \geqq 0,\ y \leqq 0,\ -\dfrac{x^2}{2} \leqq y \leqq 2-x^2$ で定まる部分 D の面積 $m(D)$ を $G(s,t)=(g(s,t),h(s,t))$ **による変数変換を必ず使って** s,t に関する重積分として表わせ. ($m(D)$ の値は求めなくてよいです.)

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください．

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください．

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください．

解き方の指定された問題は，その方法を理解しているかを試験するための問題なので，それ以外の方法でといた答案は**採点しません**．ほかの方法で検算するのは構いません．

1 1. 連続微分可能な関数 $f(x,y)$ が $f_x(x,y)=y^2$, $f_y(x,y)=xy$ をみたしたとすると，$f(x,y)$ は 2 回連続微分可能であり $f_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}y^2=2y\neq f_{yx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}xy=y$ だから，$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ に矛盾する．

2. C_1 のパラメータ表示 $x=\cos t, y=\sin t$, $(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2})$ より，$\displaystyle\int_{C_1}y^2dx+xydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(-\sin t)+\cos t\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}(-B(\frac{1}{2},2)+B(\frac{3}{2},1))=\frac{1}{2}(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3})=-\frac{1}{3}$.

C_2 のパラメータ表示 $x=x, y=1-x$, $(0\leqq x\leqq 1)$ より，$\displaystyle\int_{C_2}y^2dx+xydy=\int_0^1(1-x)^2-x(1-x)dx=\int_0^1 1-3x+2x^2dx=\left[x-\frac{3x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=1-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

3. $\displaystyle\int_D-(y^2)_y+(xy)_xdxdy=\int_0^1dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}-2y+ydy=-\int_0^1[\frac{y^2}{2}]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}dy=-\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)-(1-x)^2dx=-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=-\frac{1}{6}$ である．2. よりこれは $\displaystyle\int_{C_1}y^2dx+xydy+\int_{C_2}y^2dx+xydy=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ に等しい．

2 1. $f(x,y)=x^3-45y$, $p(x,y)=x^2-y^2+16$, $F(x,y,t)=x^3-45y-t(x^2-y^2+16)$ とおく．$F_x(x,y,t)=3x^2-2tx$, $F_y(x,y,t)=-45+2ty$, $F_t(x,y,t)=-(x^2-y^2+16)$ である．$F_x=F_y=F_t=0$ の解は $x=0$ か $3x=2t=\dfrac{45}{y}>0$ をみたす.

$x=0$ をみたす解は $(x,y,t)=(0,4,\frac{45}{8})$ であり，$3x=2t$ をみたす解は $45=3xy$ と $x^2-y^2+16=0$ をみたすから $X=x^2$ は $X^2+16X-225=(X+25)(X-9)=0$ をみたす．よって $(x,y,t)=(3,5,\frac{9}{2})$ である．したがって，極値をとりうる点は $(x,y)=(0,4)$ と $(3,5)$ の 2 点である．

2. $F_{xx}(x,y,t)=6x-2t, F_{yy}(x,y,t)=2t, F_{xy}(x,y,t)=0$, $p_x(x,y)=2x, p_y(x,y)=-2y$ だから $F_{xx}(x,y,t)p_y(x,y)^2-2F_{xy}(x,y,t)p_x(x,y)p_y(x,y)+F_{yy}(x,y,t)p_x(x,y)^2=(6x-2t)(2y)^2+2t(2x)^2=8(3xy^2-16t)$ である．

$(x,y,t)=(0,4,\frac{45}{8})$ ではこの値は負だから $(x,y)=(0,4)$ では極大値をとり，$(x,y,t)=(3,5,\frac{9}{2})$ では正だから $(x,y)=(3,5)$ では極小値をとる．

3 1. $g(s,t)^2+2h(s,t)=(s-t)^2+4st=(s+t)^2 \geqq 0$ だから $(x,y)=G(s,t)$ は $x^2+2y \geqq 0$ をみたす．連立方程式 $s-t=x, 2st=y$ の解は $(X+s)(X-t)=X^2+xX-\dfrac{y}{2}$ の解である．$x^2+2y \geqq 0$ ならこの 2 次方程式には解 (s,t) がある．$x^2+2y>0$ なら解は $(s,t) \neq (-t-s)$ の 2 つであり，$x^2+2y=0$ なら重解 $(s,t)=(-t-s)$ は $s+t=0$ をみたす．

2. $s^2+t^2=(s-t)^2+2st=g(s,t)^2+h(s,t)$ だから，像は $x^2+y \leqq 2$ に含まれる．1. より $x^2+2y \geqq 0$ にも含まれる．

1. より $x^2+2y \geqq 0$ なら $(x,y)=G(s,t)$ をみたす (s,t) があり，さらに $x^2+y=(s-t)^2+2st=s^2+t^2$ だから $x^2+y \leqq 2$ ならば，$s^2+t^2 \leqq 2$ である．よって，像は不等式 $-\dfrac{x^2}{2} \leqq y \leqq 2-x^2$ で定まる部分である．

3. 2. より，D は st 平面の $s \geqq 0 \geqq t, s^2+t^2 \leqq 2$ の写像 $G(s,t)$ による像である．$G(s,t)$ のヤコビアン $J(s,t)$ は $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2t & 2s \end{pmatrix} = 2(s+t)$ だから，1. より $m(D)=\displaystyle\int_{s \geqq 0 \geqq t, s^2+t^2 \leqq 2, s+t \geqq 0} 2(s+t)dsdt$ である．

1 1. 「$f(x,y)$ が 2 回連続微分可能ならば $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$」を使うのがてっとり早いですが，証明問題なので何を使ったのか明記してほしいところです．

$f(x,y) = xy^2 + C$（C は定数）などとしているものは誤りです．$xy^2 = g(x) - h(y)$ となることはありえないというのは正しいですが，そう主張するだけでは証明問題の解答としては不完全です．

3. 何を確かめればよいのかを明記していない答案が 1 つありました．

2 機械的にあてはめれば必ずできる問題です．

3 1. 示すべき内容は次の 2 つです．

(i) $s + t \neq 0$ ならば，$(x,y) = G(s,t)$ は $x^2 + 2y > 0$ をみたすこと．

(ii) $x^2 + 2y > 0$ ならば，$(x,y) = G(s,t)$ と $s + t \neq 0$ をみたす (s,t) がちょうど 2 つあること．

2. $x^2 + 2y \geq 0$ を忘れている人が数人いました．

3. 変数変換公式ではヤコビアンの絶対値をとらなくてはいけません．面積を求めなくてよかったのですが，答が 0 になってしまった人はそれが間違いの原因です．

$G(s,t)$ は 2 対 1 の写像なので，積分を 2 でわるか積分範囲を半分にしないと正しい式になりません．