2019 年度 数理科学基礎 期末試験問題　理 2・3 21-24

6 月 4 日（火）3 限 13:10-14:40 (90 分)　 関口英子・斎藤 毅

・氏名と学生証番号を必ず両面に記入してください．
・計算用紙 1 枚．筆記用具と計時機能のみの時計以外もちこめません．
・指定された解答欄に解答してください．答だけと指示のある問題以外は，
　途中の計算などもくわしく書いてください．

問題 1 1. 次の積分を $-1 < x < 1$ の範囲で求め，逆 3 角関数で表わせ．
(答だけを右辺に書いてください．)

(1) (1) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x.$

(2) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$

2. (1) $-1 < x < 1$ とする．$\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ を $\arctan x$ で表わせ．

［解答］$t = \arctan x$ とおく．$x = \tan t$ であり，$-\dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{\pi}{4}$ である．

よって $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \dfrac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \tan 2t$ である．

$-\dfrac{\pi}{2} < 2t < \dfrac{\pi}{2}$ だから，$\arctan\dfrac{2x}{1-x^2} = 2t = 2\arctan x$ である．

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq 1$ とする．$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ を $\arcsin x$ で表せ．

［解答］$t = \arcsin x$ とおく．$x = \sin t$ であり，$\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

よって $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin t\cos t = \sin 2t = \sin(\pi - 2t)$ である．

$\dfrac{\pi}{2} < 2t < \pi$ だから，$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \pi - 2t = \pi - 2\arcsin x$ である．

問題 2 1. 微分方程式 $x + y' = xy^2$ の解 $y = f(x)$ で，$f(x) > 1$ をみたすものを求め，求めた解が方程式と不等式をみたすことも確かめよ．

［解答］移項すれば $\dfrac{y'}{y^2-1} = x$ となる．

$\displaystyle\int \frac{y'}{y^2-1}dx = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)dy = \frac{1}{2}(\log(y-1) - \log(y+1))$ だから，

$\log\dfrac{y-1}{y+1} = x^2 + C$ である．よって $\dfrac{y-1}{y+1} = Ce^{x^2}$ である．これを解いて

$f(x) = \dfrac{1+Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$ である．$0 < y-1 < y+1$ だから $0 < C < 1$ である．

$\Big(\dfrac{1+Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}\Big)' = \dfrac{Ce^{x^2}\cdot 2x(1-Ce^{x^2}) + Ce^{x^2}\cdot 2x(1+Ce^{x^2})}{(1-Ce^{x^2})^2} = \dfrac{4x\cdot Ce^{x^2}}{(1-Ce^{x^2})^2}$ だから $x + f'(x) = \dfrac{x(1-Ce^{x^2})^2 + 4x\cdot Ce^{x^2}}{(1-Ce^{x^2})^2} = x\dfrac{(1+Ce^{x^2})^2}{(1-Ce^{x^2})^2}$ である．

$Ce^{x^2} < 1$ つまり $-\sqrt{-\log C} < x < \sqrt{-\log C}$ の範囲で $0 < 1 - Ce^{x^2} < 1 + Ce^{x^2}$ であり，$\dfrac{1+Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}} > 1$ である．

2. 1. の解 $f(x)$ が初期条件 $f(0)=2$ をみたすとする．$f(x)$ が定義される開区間 (a,b), $a<0<b$ のうち $b-a$ が最大のものを求めよ．

x が左から b に近づくときの極限 $\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x)$ も調べよ．

［解答］$x=0, y=2$ とすれば，$C=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$ である．

求める範囲は $Ce^{x^2}<1$ だから，$e^{x^2}<3$, $x^2<\log 3$ であり，$(a,b)=(-\sqrt{\log 3}, \sqrt{\log 3})$ である．

$$\lim_{x\to\sqrt{\log 3}-0}\frac{1+\frac{1}{3}e^{x^2}}{1-\frac{1}{3}e^{x^2}}=\infty \text{ である．}$$

問題 3 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{9}xy\right)$ とする．$c=f(3,1)$ とおく．

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

［解答］$f_x(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi}{9}xy\right)\cdot\dfrac{\pi}{9}y=\dfrac{y}{9}\cos\left(\dfrac{\pi}{9}xy\right)$ である．

2. $z=f(x,y)$ のグラフの，点 $(3,1,c)$ での接平面の方程式を求めよ．

［解答］$f(3,1)=\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{3\pi}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $f_x(3,1)=\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{3\pi}{9}=\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{18}$,

$f_y(3,1)=f_x(3,1)=\dfrac{3}{9}\cos\dfrac{3\pi}{9}=\dfrac{3}{9}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{6}$ だから，

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{18}(x-3)+\frac{1}{6}(y-1).$$

$\left(z=\dfrac{1}{18}x+\dfrac{1}{6}y+c-\dfrac{1}{3}\right.$ などでもよい．)

3. 点 (x,y) が 2. で求めた接平面と平面 $z=c$ の共通部分に含まれるとする．

y を x の関数として表わせ．

［解答］$\dfrac{1}{18}(x-3)+\dfrac{1}{6}(y-1)=0$ だから，$y=-\dfrac{1}{3}(x-3)+1=-\dfrac{1}{3}x+2.$

4. 等高線 $f(x,y)=f(3,1)$ と 3. の答で表わされる図形のうち，$0<x<10$, $0<y<10$ の部分を同一平面上に図示せよ．

［解答］等高線は $xy=3$, $xy=6$, $xy=21$, $xy=27$, $xy=39$, $xy=42,\cdots$ であり，3. の答は，等高線 $xy=3$ の $(x,y)=(3,1)$ での接線である．

等高線の図は省略します．