2018年度 数理科学基礎 期末試験問題　理1 20-23

6月1日（金）3限 13:10-14:40 (90分)　 梶原　健・斎藤 毅

・問題用紙　1枚，解答用紙　A4両面3枚（6ページ)，計算用紙1枚.

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.

・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

問題 1 平面 $\mathbf{R}^2$ 全体で定義された2変数関数 $(1+x^2)^y$ を $f(x,y)$ で表わす.

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ と2階の偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ を求めよ.
2. 点 $(1,2)$ での勾配ベクトル $\nabla f(1,2)$ を求めよ.
3. 点 $(1,2,4)$ でのグラフ $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.
4. 等高線 $f(x,y)=4$ の概形を図示せよ.

問題 2 $y=f(x)$ を，微分方程式 $(1-x^2)y'^2=y^2$ の解で $f(0)=1$ をみたすものとする．$f(\frac{1}{2})$ を求めよ.　　　　（注意：答は複数あります.）

問題 3 1. $\arctan u = \arctan s + \arctan t$ をみたす実数 u が存在するとき，u を3角関数や逆3角関数を含まない s,t の式で表わせ.

2. 上の u が存在するための s,t についての条件を，3角関数や逆3角関数を含まない s と t に関する不等式として求めよ.

問題 4 $f(x)$ を，数直線 $\mathbf{R}$ 上 $x=0$ をのぞきいたるところ定義された関数とする．c,q,r,x は実数を表わすものとする.

1. 極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ が収束しないことを表わすものになるように，

$$\boxed{(1)}\, c\ \boxed{(2)}\, q>0\ \boxed{(3)}\, r>0\ \boxed{(4)}\, x\ \Big(\ \boxed{\quad (A) \quad}\ \boxed{(a)}\ \boxed{\quad (B) \quad}\ \Big).$$

の空欄にあてはまるものを，それぞれ下のものの中から求めよ.

(1)–(4)：全称記号 $\forall$ か存在記号 $\exists$ のどちらか,

(a)：「かつ」,「または」,「ならば」のどれか,

(A),(B) ：$c,q,r,x,f(x)$ のいくつかと絶対値記号 $|\ |$ を含む不等式.

2. $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ とする．問1の答で空欄をうめてえられるものがなりたつことを示せ.

1. 1. $f(x,y)=(1+x^2)^y$ だから，$f_x(x,y)=y(1+x^2)^{y-1}\cdot 2x$,
$f_y(x,y)=(1+x^2)^y\cdot\log(1+x^2)$.
$f_{xx}(x,y)=y(y-1)(1+x^2)^{y-2}\cdot 4x^2+2y(1+x^2)^{y-1}$,
$f_{yx}(x,y)=y(1+x^2)^{y-1}\cdot 2x\cdot\log(1+x^2)+(1+x^2)^y\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}$
$=y(1+x^2)^{y-1}\cdot 2x\cdot\log(1+x^2)+(1+x^2)^{y-1}\cdot 2x$.
2. $\begin{pmatrix} 8 \\ 4\log 2\end{pmatrix}$
3. $z=8(x-1)+4\log 2(y-2)+4$. 整理すれば，$z=8x+4\log 2\cdot y-4-8\log 2$.
4. 両辺の $\log$ をとれば $y\log(1+x^2)=2\log 2$ だから，$y=g(x)=\dfrac{2\log 2}{\log(1+x^2)}$ のグラフ．$g(x)$ は $x=0$ をのぞき定義され，$x\neq 0$ で $g(x)>0$. $g(x)$ は，$x<0$ で単調増加，$x>0$ で単調減少．$\lim_{x\to 0}g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to -\infty}g(x)=0$.

2. 両辺の平方根をとって移項すれば $\dfrac{y'}{y}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. よって，$\log|y|=\pm\arcsin x+c$. したがって $y=C\cdot\exp(\pm\arcsin x)$.
$x=0$ のとき，$\exp(\pm\arcsin 0)=1$ だから，$C=1$.
よって $f(x)=\exp(\pm\arcsin x)$ で，$f(\dfrac{1}{2})=\exp(\pm\dfrac{\pi}{6})$.

3. $x=\arctan s, y=\arctan t$ とおく．
1. $s=\tan x$, $t=\tan y$ だから，$x+y=\arctan u$ ならば，

$$u=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{s+t}{1-st}.$$

2. $\arctan u=x+y$ をみたす u が存在するための条件は $-\dfrac{\pi}{2}<x+y<\dfrac{\pi}{2}$ である．$-\dfrac{\pi}{2}<x,y<\dfrac{\pi}{2}$ だから，$-\dfrac{\pi}{2}<x+y<\dfrac{\pi}{2}$ は $\cos(x+y)>0$ と同値である．$-\dfrac{\pi}{2}<x,y<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos x,\cos y>0$ だから，

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y(1-\tan x\tan y)=\cos x\cos y(1-st)$$

より，$\cos(x+y)>0$ は $st<1$ と同値である．

4. 1. $\forall c\ \exists q>0\ \forall r>0\ \exists x\ \big(0<|x|<r$ かつ $|f(x)-c|>q\big)$. だから
(1) $\forall$, (2) $\exists$, (3) $\forall$, (4) $\exists$, (a) かつ，(A) $0<|x|<r$, (B) $|f(x)-c|>q$.
2. $\forall c\ \exists q>0\ \forall r>0\ \exists x\ \big(0<|x|<r$ かつ $|\cos\dfrac{1}{x}-c|>1\big)$ を示す．

任意の実数 c に対し，$q=\dfrac{1}{2}>0$ が条件をみたすことを示す．$r>0$ とする．n を $n>\dfrac{1}{\pi r}$ をみたす自然数とする．$0<\dfrac{1}{(n+1)\pi}<\dfrac{1}{n\pi}<r$ であり，$f(\dfrac{1}{(n+1)\pi})=\cos(n+1)\pi=(-1)^{n+1}$, $f(\dfrac{1}{n\pi})=\cos n\pi=(-1)^n$ である．$|(-1)^n-c|+|(-1)^{n+1}-c|\geqq|(-1)^n-(-1)^{n+1}|=2$ だから，$|f(\dfrac{1}{(n+1)\pi})-c|$ と $|f(\dfrac{1}{n\pi})-c|$ のどちらか一方は，$\geqq 1>\dfrac{1}{2}=q$ をみたす．