2016 年度 微分積分学 S2 ターム末試験問題　理 1 36-39

7 月 27 日（水）15:05-16:35 (90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ)，計算用紙 1 枚.

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.

・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 $f(x,y)$ を 2 変数の微分可能な関数とし，合成関数 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を $g(r,\theta)$ で表わす．それぞれの偏導関数を $f_x(x,y), f_y(x,y)$ と $g_r(r,\theta), g_\theta(r,\theta)$ とする.

1. 合成関数 $f_x(r\cos\theta, r\sin\theta), f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を，$g_r(r,\theta), g_\theta(r,\theta)$ を使って表わせ.

2. 原点をのぞき定義された関数 $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ を $f(x,y)$ で表わす.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 合成関数 $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とその偏導関数 $g_r(r,\theta), g_\theta(r,\theta)$ も求め，1. で求めた式がなりたっていることを確かめよ.

(3) 開区間 $(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$ で定義された微分可能な関数 $r(t) > 0$ で，パラメータ表示された曲線 $(p(t), q(t)) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$，$(-\dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{\pi}{4})$ の各点で接ベクトルが勾配ベクトル $\mathrm{grad}\ f(p(t), q(t))$ と直交し，$r(0) = 1$ であるものを求めよ.

問題 2 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ とし，$f^{(n)}(x)$ で n 次導関数を表わす.

1. 5 次式 $p_5(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ を求めよ.

2. $0 < x < \dfrac{1}{10}$ ならば $0 < \dfrac{f^{(5)}(x)}{5!} < 1$ であることを示せ.

3. テイラーの定理を使って，$\sqrt{10} = 3 \cdot f(\dfrac{1}{10})$ の値を小数点以下 4 桁まで求めよ.

問題 3 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とする.

1. $0 < a < 4$ とする．y についての方程式 $f(a,y) = 675$ の解 $y = b$ がただ 1 つ存在することを示せ．$b > \sqrt{a}$ も示せ.

2. 開区間 $(0,4)$ で定義された関数 $g(x)$ を，$f(x, g(x)) = 675$ で定める．$0 < x < 4$ での $g(x)$ の極大値と極小値をすべて求めよ.

3. 次の条件をみたす実数 c の範囲を求めよ：任意の $0 < x < 4$ に対し，y についての方程式 $f(x,y) = c$ の解がただ 1 つ存在する.

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，解き方が問題の趣旨にあってないものや，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1 1. 連鎖律より，$(g_r\ g_\theta) = (f_x\ f_y)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$ である．よって，

$(f_x\ f_y) = (g_r\ g_\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$ だから，

$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = g_r(r,\theta)\cos\theta - g_\theta(r,\theta)\dfrac{\sin\theta}{r}$,

$f_y(r\cos\theta, r\sin\theta) = g_r(r,\theta)\sin\theta + g_\theta(r,\theta)\dfrac{\cos\theta}{r}$.

2. (1) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2\cdot 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$.
同様に $f_y(x,y) = \dfrac{2y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

(2) $g(r,\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{r^2}$ だから，$g_r(r,\theta) = -\dfrac{2\cos 2\theta}{r^3}$，$g_\theta(r,\theta) = -\dfrac{2\sin 2\theta}{r^2}$.

1 で求めた式の右辺に代入すれば，それぞれ

$-\dfrac{2\cos 2\theta}{r^3}\cos\theta + \dfrac{2\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\sin\theta}{r} = \dfrac{2\cos\theta(-\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)}{r^3}$.

$-\dfrac{2\cos 2\theta}{r^3}\sin\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\cos\theta}{r} = \dfrac{2\sin\theta(-3\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{r^3}$.

(3) パラメータ表示された曲線 $(p(t), q(t))$ の各点で接ベクトルが勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, f(p(t), q(t))$ と直交すれば，連鎖律より $f(p(t), q(t))$ は定数関数である．$f(1,0) = 1$ で，$g(r,\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{r^2}$ だから，$r(t)^2 = \cos 2t$ であり，$r(t) = \sqrt{\cos 2t}$ である．

2 1. $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}^{2n+1}}$ だから $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$ で，

$$p_5(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{63}{256}x^5.$$

2. $f^{(n)}(x)$ は $0 \leqq x < 1$ で単調増加だから，$0 < x < \dfrac{1}{10}$ で

$$0 < \frac{f^{(5)}(x)}{5!} < \frac{f^{(5)}(\frac{1}{10})}{5!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{-\frac{11}{2}} < \frac{1}{2}\Big(\frac{10}{9}\Big)^{\frac{3}{2}} = \frac{10\sqrt{10}}{54} < 1.$$

3. テイラーの定理より $f(\frac{1}{10}) = p_4(\frac{1}{10}) + \dfrac{f^{(5)}(x)}{5!}\dfrac{1}{10^5}$ をみたす $0 < x < \dfrac{1}{10}$ があるから，2 より．$p_4(\frac{1}{10}) < f(\frac{1}{10}) < p_4(\frac{1}{10}) + \dfrac{1}{10^5}$.

$p_4\Big(\dfrac{1}{10}\Big) = 1 + 0.05 + 0.00375 + 0.0003125 + 0.00002734375 = 1.05408984375$
で $3\cdot p_4\Big(\dfrac{1}{10}\Big) = 3.16226953125$ だから，$\sqrt{10} = 3.1622\cdots$

3 1. $f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$ である．$0 < a < 4$ とする．y の関数 $f(a,y)$ は $(-\infty, -\sqrt{a}]$ で単調増加，$[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$ で単調減少，$[\sqrt{a}, \infty)$ で単調増加である．$\lim_{y\to-\infty} f(a,y) = -\infty$, $\lim_{y\to\infty} f(a,y) = \infty$ で $f(a,-\sqrt{a}) = a^3 + 2a\sqrt{a} < 64 + 16 = 80 < 675$ だから，$f(a,y) = 675$ の解 $y = b$ はただ 1 つであり，$b > \sqrt{a}$ をみたす．

2. 陰関数定理より，$g(x)$ は連続微分可能である．連鎖律より $f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))g'(x) = 0$ だから，$g'(x) = -\dfrac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$ である．$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ だから，$g'(x) = -\dfrac{3x^2 - 3g(x)}{3g(x)^2 - 3x}$ である．したがって極値をとりうる x では $g(x) = x^2$ である．$f(x,g(x)) = x^6 - 2x^3 = 675$ だから，$(x^3 - 27)(x^3 + 25) = 0$ であり，$x = 3$ である．

1 より $g(x) > \sqrt{x}$ だから，$g'(x) = -\dfrac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$ の分母 $3g(x)^2 - 3x$ は > 0 である．$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ は $x > 0$ の範囲で放物線 $y = x^2$ の左では < 0, 右では > 0 である．よって，$g'(x) = -\dfrac{3x^2 - 3g(x)}{3g(x)^2 - 3x}$ は，$x < 3$ なら > 0, $x > 3$ なら < 0 であり，$g(x)$ は $x = 3$ で極大値 9 をとる．

3. $0 < a < 4$ とする．1 と同様に $f(a,y) = c$ の解がただ 1 つであるための条件は $c < f(a,\sqrt{a}) = a^3 - 2a\sqrt{a}$ または $c > f(a,-\sqrt{a}) = a^3 + 2a\sqrt{a}$ である．$0 < a < 4$ での $a^3 - 2a\sqrt{a}$ と $a^3 + 2a\sqrt{a}$ の値の範囲はそれぞれ $[-1, 48)$ と $(0, 80)$ だから，求める c の範囲は，$c < -1$ または $c \geqq 80$ である．