2016年度 微分積分学 期末試験問題　理1 36-39

1月25日（水）15:05-16:35 (90分)　 斎藤 毅

・問題用紙　1枚，解答用紙　2枚（4ページ)，計算用紙1枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.
・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 2変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = 3xy^2 + 3y^2 - 2x^3 + 3x^2$$

で定める.

1. $f(x,y)$ の偏導関数を使って，$f(x,y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.
2. $f(x,y)$ の2階の偏導関数を使って，1で求めた各点で $f(x,y)$ が極大値をとるか極小値をとるか峠点となるか判定せよ.

問題 2 重積分

$$\int_{x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y} xy\,dx\,dy$$

の値を次の方法で求めよ.

1. y について先に積分する逐次積分.
2. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で変数変換.

問題 3 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ の収束半径を r とし，開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $f(x)$ を次の式で定める：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

1. 収束半径 r を求めよ.
2. 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
3. $f(x)$ を求めよ.
4. $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を求めよ.

問題 4 1. 次の広義積分の値を求めよ：

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx.$$

2. $f(x)$ は $[1,\infty)$ で定義された単調減少な連続関数で $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ をみたすものとする．次の広義積分が収束することを示せ：

$$\int_1^{\infty} \left(f(x) - f(\sqrt{x^2+1})\right) dx.$$

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，解き方が問題の趣旨にあってないものや，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1 1. $f(x,y)=3xy^2+3y^2-2x^3+3x^2$ より，$f_x(x,y)=3y^2-6x^2+6x$, $f_y(x,y)=6(x+1)y$. よって，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ をみたす点 (x,y) は $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,\pm 2)$ の 4 点．

2. $f_{xx}(x,y)=-12x+6$, $f_{xy}(x,y)=6y$, $f_{yy}(x,y)=6(x+1)$.

$f_{xx}(0,0)=6$, $f_{xy}(0,0)=0$, $f_{yy}(0,0)=6$ で，$6^2-0^2>0$ だから $(x,y)=(0,0)$ で $f(x,y)$ は極小値 0 をとる．

$f_{xx}(1,0)=-6$, $f_{xy}(1,0)=0$, $f_{yy}(1,0)=12$ で，$-6\cdot 12-0^2<0$ だから $(x,y)=(1,0)$ で $f(x,y)$ は峠点である．

$f_{xx}(-1,\pm 2)=18$, $f_{xy}(-1,\pm 2)=\pm 12$, $f_{yy}(-1,\pm 2)=0$ で，$18\cdot 0-(\pm 12)^2<0$ だから $(x,y)=(-1,\pm 2)$ でも $f(x,y)$ は峠点である．

2 1. $$\int_{x^2+(y-1)^2\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y} xydxdy=\int_0^1 dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} xydy=\int_0^1\Big[\frac{xy^2}{2}\Big]_x^{1+\sqrt{1-x^2}}dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x((1+\sqrt{1-x^2})^2-x^2)dx=\int_0^1 x(1-x^2+\sqrt{1-x^2})dx$$
$$=\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}.$$

2. $$\int_{x^2+(y-1)^2\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y} xydxdy=\int_{r^2\leqq 2r\sin\theta,\ 0\leqq r\leqq 2,\ \frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdrd\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3\cos\theta\sin\theta dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin\theta)^4}{4}\cos\theta\sin\theta d\theta$$
$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta d\theta=\frac{4}{6}[\sin^6\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}^6})=\frac{2}{3}\frac{7}{8}=\frac{7}{12}.$$

3 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=1$ だからダランベールの公式より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4n+1}$ の収束半径は 1. したがって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1}$ の収束半径も $\sqrt[4]{1}=1$.

2. 項別微分より，$\displaystyle f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}$.

3. 2 より
$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+\frac{1}{4}\int_0^x\frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=-\frac{1}{4}\log(1-x)+\frac{1}{4}\log(1+x)+\frac{1}{2}\arctan x=\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x.$$

4. 3 より $f\Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{6}$
$= \dfrac{1}{4}\log\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\log(2+\sqrt{3}) + \dfrac{\pi}{12}$.

4. 1. $t = \sqrt{x^2+1}+x$ とおけば $x = \dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{t})$ だから，

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt = \int \frac{1}{t}dt = \log(\sqrt{x^2+1}+x)$.

よって求める広義積分は $[\log x - \log(\sqrt{x^2+1}+x)]_1^\infty = [\log\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}]_1^\infty =$ $[\log\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}]_1^\infty = \log\dfrac{1}{2} - \log\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2. $f(x)$ は単調減少で $x < \sqrt{x^2+1} < x+1$ だから $0 < f(x) - f(\sqrt{x^2+1}) <$ $f(x) - f(x+1)$. 数列 (a_n) を $a_n = f(n)$ で定めると級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ は a_1 に収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty (f(x)-f(x+1))dx$ も収束する．よって優関数の方法より広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty (f(x)-f(\sqrt{x^2+1}))dx$ も収束する．