2016 年度夏学期 数理科学基礎 期末試験問題　理 1 36-39

6 月 3 日（金）13:10-14:40 (90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ)，計算用紙 1 枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページ問題 n を解答してください.
・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 1. $x \geqq 0$ ならば $e^x \geqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ であることを示せ.

2. 次の条件をみたす実数 $c > 0$ を 1 つ与え，それが確かに条件をみたしていることを確かめよ.

> 任意の実数 $q > 0$ に対し，$r = cq > 0$ とおけば，$x > r$ ならば $\dfrac{e^x}{x^2} > q$ がなりたつ.

問題 2 xy 平面の $x > 0$ の部分で定義された関数 $f(x, y) = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ について，次の問題に答えよ.

1. 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めよ.
2. $f(x, y)$ のグラフの点 $(1, \sqrt{3}, f(1, \sqrt{3}))$ での接平面の方程式を求めよ.
3. 連鎖律を使って，合成関数 $g(x, y) = \tan f(x, y)$ の偏導関数 $g_x(x, y), g_y(x, y)$ を求めよ.

問題 3　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

1. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と直交するベクトル $\boldsymbol{c} \neq 0$ を 1 つ求めよ.
2. 点 $(0, 0, 1)$ をとおり，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と平行なベクトルを含む平面の方程式を求めよ.
3. 連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

で定まる直線のパラメータ表示を 1 つ与えよ.

問題 4　1. 写像 $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，点 $(-1, 0)$ を中心とする各 $\dfrac{\pi}{2}$ の回転として定める．行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ で，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対し $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ となるものを求めよ.

2. 平面の点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ を P, Q で表し，線形写像 $G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$G(P) = F(P)$, $G(Q) = F(Q)$ で定める．行列 B で，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対し $G(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ となるものを求めよ.

3. 行列 C とベクトル $\boldsymbol{c}$ で，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対し $(G^{-1} \circ F)(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ となるものを求めよ.

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1 1. $(e^x)' = e^x > 0$ で $e^0 = 1$ だから，$x \geqq 0$ で $e^x \geqq 1$ である．$x \geqq 0$ で $(e^x)' = e^x \geqq (1+x)' = 1$ で $e^0 = 1+0$ だから，$x \geqq 0$ で $e^x \geqq 1+x$ である．$x \geqq 0$ で $(e^x)' = e^x \geqq (1+x+\frac{x^2}{2})' = 1$ で $e^0 = 1+0+\frac{0^2}{2}$ だから，$x \geqq 0$ で $e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}$ である．$x \geqq 0$ で $(e^x)' = e^x \geqq (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})' = 1$ で $e^0 = 1+0+\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{6}$ だから，$x \geqq 0$ で $e^x \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ である．

2. $c = 6$ とおく．$x > r = 6q$ とすると，1. より $\dfrac{e^x}{x^2} \geqq \dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}{x^2} \geqq \dfrac{x}{6} > \dfrac{r}{6} = q$ である．

2 1. $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから合成関数の微分より，

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\cdot y \cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{y \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot y \cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

2. 1. より求める式は $z = f_x(1,\sqrt{3})(x-1) + f_y(1,\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) + f(1,\sqrt{3})$ だから，$z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-1) + \dfrac{1}{4}(y-\sqrt{3}) + \dfrac{\pi}{3}$.

3. $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ で，$\cos^2 f(x,y) = 1 - \sin^2 f(x,y) = 1 - \dfrac{y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ である．よって 1 と連鎖律より $g_x(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2} \cdot \dfrac{-y}{x^2+y^2} = -\dfrac{y}{x^2}$, $g_y(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2} \cdot \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{x}$.

3 1. $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 1-4+3 = 0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = -1-2+3 = 0$.

2. $x - 2y + 3z = 3$.

3. $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{c} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 1. $F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $F(P) = (-1,2)$, $F(Q) = (-2,1)$ より，$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ だから，$C = B^{-1}A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.