2015 年度秋学期 微分積分学 期末試験問題 理 1 28-31

12 月 25 日（木）14:55-16:25 (90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ)，計算用紙 1 枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.
・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 数列 (a_n) を $a_n = 4^n + (-1)^n$ で定める.

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を求めよ.

2. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ が定める関数を，$e^x, \cos x, \sin x$ を使って表わせ.（使わないものもあります）

問題 2 2 変数の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = 3x^4 - 4y^3 + 12xy$ で定める.

1. $f(x,y)$ の偏導関数を使って，$f(x,y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ.

2. $f(x,y)$ の 2 階の偏導関数を使って，1 で求めた各点で $f(x,y)$ が極小値をとるか極大値をとるか峠点になるかそのどれでもないか判定せよ.

問題 3 1. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+k^2}}{n^2}$ を定積分で表わし，その値を求めよ.

2. $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ で定義された一様連続な関数とする．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})|$ を求めよ.

問題 4 単位円 $x^2 + y^2 \leqq 1$ の第 1 象限 $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ に含まれる部分を D で表わす．積分 $\displaystyle\int_D x^2 y^4 dxdy$ の値を次の方法で求めよ.

1. 逐次積分
2. 極座標による変数変換.

注　意

　答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

　答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

　読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1 1. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{4}$ だからダランベールの公式より収束半径は $\frac{1}{4}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

$e^x-e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ だから，第 1 項は $\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})$.

第 2 項は $\sin x$ だから，求める関数は $\frac{1}{4}(e^x+\frac{1}{e^x})(e^x-\frac{1}{e^x})+\sin x$.

2 1. $f(x,y)=3x^4-4y^3+12xy$ だから $f_x(x,y)=12(x^3+y)$, $f_y(x,y)=12(-y^2+x)$.

よって $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ ならば $y=-x^3, x=y^2=x^6$.

したがって $x=0,1$ で，$(x,y)=(0,0),(1,-1)$.

2. $f_{xx}(x,y)=12\cdot 3x^2$, $f_{yy}(x,y)=12\cdot(-2y)$, $f_{xy}(x,y)=12$.

したがって $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=12$. よって $(x,y)=(0,0)$ は峠点.

$f_{xx}(1,-1)=36, f_{yy}(1,-1)=24$, $f_{xy}(1,-1)=12$ で $36\cdot 24-12^2=5\cdot 12^2>0$ だから，$(x,y)=(1,-1)$ で $f(x,y)$ は極小値をとる.

3 1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+k^2}}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ だから，極限は $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$.

$=[\frac{1}{2}(\log(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2})]_0^1=\frac{1}{2}(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$.

2. $f(x)$ は一様連続だから，任意の実数 $q>0$ に対し，実数 $r>0$ で $x,y\in[0,1]$, $|x-y|<r$ なら $|f(x)-f(y)|<q$ となるものがある．この r に対し $n>\frac{1}{r}$ なら $0\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})|<q$. よって，極限は 0.

4 1. $\int_D x^2y^4dxdy=\int_0^1 x^2\frac{\sqrt{1-x^2}^5}{5}dx$.

x^2 を x とおいて置換積分すれば，$=\frac{1}{10}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{5}{2}}dx=\frac{1}{10}B(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$.

$=\frac{1}{10}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(5)}=\frac{1}{10}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4!}=\frac{\pi}{256}$.

2. $\int_D x^2y^4dxdy=\int_{0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta r^4\sin^4\theta rdrd\theta$

$=\int_0^1 r^7dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^4\theta d\theta=\frac{1}{8}\frac{1}{2}B(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.

$=\frac{1}{16}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{1}{16}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!}=\frac{\pi}{256}$.