2015 年度夏学期 **数理科学基礎 期末試験問題** 理 2・3 11-13

6 月 4 日（木）13:00-14:30 (90 分)　 斎藤 毅

・問題用紙　2 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ)，計算用紙 1 枚.

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.

・なるべく，答案用紙の第 1, 2 ページ（1 枚目）に共通問題 1〜6, 第 3, 4 ページ（2 枚目）にこの用紙の問題 1〜3 を解答してください.

・裏面の注意もよく読んでください.

問題 1 1. $x > 0$ ならば $-\log x < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ であることを示せ.

2. 右極限 $b = \lim_{x \to +0} x \log x$ を求めよ.

3. $q > 0$ を実数とする．次の条件をみたす実数 $r > 0$ を 1 つ与えよ.

$0 < x < r$ ならば $|x \log x - b| < q$ である.

問題 2 $x \neq -1$ で定義された関数 $\arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ について，次の問題に答えよ.

1. $\arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ の導関数を求めよ.

2. $\arctan \dfrac{1-x}{1+x}$ を $\arctan x$ を使って表わせ.

問題 3 　3 点 $S(1,0,0)$, $T(0,1,0)$, $U(0,0,1)$ をとおる平面を H で表わし，角 $\angle STU$ の 2 等分線を L で表わす.

1. 平面 H の方程式を求めよ.

2. 次の条件をみたす 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ を求めよ.

点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{x}$ ならば，平面 H に関して点 P と対称な点 Q の位置ベクトルは $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ である.

3. 次の条件をみたす 3 次正方行列 B とベクトル $\boldsymbol{b}$ を求めよ.

点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{x}$ ならば，直線 L を軸として点 P を角 π 回転して得られる点 R の位置ベクトルは $B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ である.

4. 写像 $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ と $G\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ をそれぞれ 2, 3 の記号で $F(P) = Q$ と $G(P) = R$ で定める.

合成写像 $G \circ F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ が線形写像であるかないか判定し，線形写像であればその表現行列を求めよ.

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1 1. 両辺微分すると $(-\log x)' = -\dfrac{1}{x}$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 2\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}^3} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ である．
$0<x<1$ では $-\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ であり，$x>1$ では $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ である．
よって $\log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ は $0<x\leqq 1$ で単調減少，$x \geqq 1$ では単調増加である．
$x=1$ で $-\log 1 = 0 < \dfrac{2}{\sqrt{1}} = 2$ だから，$x>0$ で $-\log x < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ である．

2. 1. より，$0<x<1$ で $0 > x\log x > -2\sqrt{x}$ である． $\lim_{x\to+0} 2\sqrt{x} = 0$ だから，はさみうちの原理より $\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ である．

3. $r = \min(1, \dfrac{q^2}{4}) > 0$ とおく． $0<x<r\leqq 1$ ならば，$\log x < 0$ だから 1. より $|x\log x| = x\cdot(-\log x) < 2\sqrt{x} < 2\sqrt{r} \leqq q$ である．

2 1. $\left(\arctan\dfrac{1-x}{1+x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{2(1+x^2)} = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 1. より $\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ は $x>-1$ と $x<-1$ でそれぞれ定数関数である． $x=0$ とすれば，$\arctan 0 + \arctan 1 = 0 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$,

$\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \arctan(-1) = -\dfrac{3\pi}{4}$ だから，

$\arctan\dfrac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - \arctan x & (x>-1) \\ -\dfrac{3\pi}{4} - \arctan x & (x<-1) \end{cases}$ である．

［別解］ $\theta = \arctan x$ とおく． $x = \tan\theta$ だから，

$\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \tan(\dfrac{\pi}{4} - \theta)$ である．

$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x, \arctan\dfrac{1-x}{1+x} < \dfrac{\pi}{2}$ だから，上の式が得られる．

3 1. $x+y+z=1$

2. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすれば $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ である． $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき，$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ だから，$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

3. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすれば $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ である． $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき，それぞれ $B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ だから，$B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

4. 2. と 3. より，点 $G(F(P))$ の位置ベクトルは $B(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=BA\boldsymbol{x}+B\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ である．原点を O とすると $G(F(O))=O$ だから，$B\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$ である．よって，合成写像 $G\circ F$ は BA 倍写像だから線形写像である．

$G(F(S))=G(S)=U, G(F(T))=G(T)=T, G(F(U))=G(U)=S$ だから，表現行列は $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ である．

［別解］2. $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とおき，P から平面 H におろした垂線の足の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする．$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{d}$ と平行で $\boldsymbol{p}$ は平面 H 上にある．よって $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}=k\cdot\boldsymbol{d}$ とおくと，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{p}+k\cdot\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{d}=1+k\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=3k+1$ である．Q の位置ベクトルは $\boldsymbol{p}-k\boldsymbol{d}=\boldsymbol{x}-2k\boldsymbol{d}$ だから，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおけば，$k=\dfrac{x+y+z}{3}-\dfrac{1}{3}$ より，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ である．よって，$A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

3. T の位置ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とし，点 P をとおり直線 L と直交する平面と直線 L の交点の位置ベクトルを $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{q}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{t}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ と平行で，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{e}$ と直交する．よって $\boldsymbol{q}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d}=l\cdot\boldsymbol{e}$ とおくと，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}+l\cdot\boldsymbol{e}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{e}=l\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=6l$ である．$\boldsymbol{q}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d}+l\cdot\boldsymbol{e}$ だから，R の位置ベクトルは $\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})=2(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{d}+l\cdot\boldsymbol{e})-\boldsymbol{x}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{d}+\dfrac{-x+2y-z}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}-\boldsymbol{x}$ である．よって，$B=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

4. 2. と 3. より，点 $G(F(P))$ の位置ベクトルは $B(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=BA\boldsymbol{x}+B\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ である．原点を O とすると $B\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=B\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$ は，点 $G(G(O))=O$ の位置ベクトルであり $\mathbf{0}$ である．

よって合成写像 $G\circ F\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ は線形写像であり，その表現行列は $BA=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ である．

多かった間違い，気になったことなど．

1 3. $0 < x < 1$ では $\log x < 0$ なので，$0 < x < r$ から $|\log x| < |\log r|$ を導けません．

2 2. $\arctan \dfrac{1-x}{1+x} = -\arctan x + C$ となる定数 C の値は $x > -1$ と $x < -1$ とで違います．

x に $\tan(\arctan x)$ を代入しただけのものは不正解としました．

3 2. 以降は難しかったようです．解答を参考にして勉強してください．