数学I 模擬試験問題　2014年5月14日（水）

・問題用紙　1枚、解答用紙　1枚、計算用紙1枚

・なるべく，答案用紙の表に問題1と2，うらに問題3と4を解答してください.

・本やノートは見てもかまいませんが，ほかの人と相談したりほかの人の答を写したりしてはいけません.

問題 1　$-1 \leqq s \leqq 1, -1 \leqq t \leqq 1$ とする.

(1) $-1 \leqq s\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-s^2}\, t \leqq 1$ を示せ.

(2) $\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2} \geqq st$ ならば $\arcsin s + \arcsin t = \arcsin(s\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-s^2}\, t)$ であることを示せ.

問題 2 次のようにして $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ を示せ.

(1)　$n \geqq 1$ を自然数とする．$x > -n$ ならば $e^x \geqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ であることを示せ. $x < n$ ならば $e^x \leqq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}$ であることも示せ.

(2)　$0 \leqq t \leqq n$ ならば $1-\frac{t}{n} \leqq \left(1-\frac{t}{n^2}\right)^n \leqq 1$ であることを示せ.

(3)　(1) と (2) を使って，すべての実数 x に対し $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ であることを示せ.

問題 3　$f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ で定義された関数とし，$f(0) \leqq t \leqq f(1)$ とする．数列 (s_n) を，次の (i) と (ii) で帰納的に定める.

(i) $f(\frac{1}{2}) \geqq t$ なら $s_1 = 0$ とおき，$f(\frac{1}{2}) < t$ なら $s_1 = \frac{1}{2}$ とおく.

(ii) $n \geqq 1$ とし，$s_1, \ldots, s_n$ が定まっているとする．$f(s_n + \frac{1}{2^{n+1}}) \geqq t$ なら $s_{n+1} = s_n$ とおき，$f(s_n + \frac{1}{2^{n+1}}) < t$ なら $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ とおく.

すべての自然数 $n \geqq 1$ に対し $f(s_n) \leqq t \leqq f(s_n + \frac{1}{2^n})$ であることを，n に関する帰納法で示せ.

問題 4　$f(x)$ を開区間 (a,b) で定義された微分可能な関数とし，(a,b) で $f'(x) \geqq 0$ であるとする.

(1) $q > 0$ を実数とする．次の定理を $g(x) = f(x) + q\cdot x$ に適用して，$a < s < t < b$ ならば $f(s) < f(t) + q\cdot(t-s)$ であることを示せ.

定理　$g(x)$ を開区間 (a,b) で定義された微分可能な関数とし，(a,b) で $g'(x) > 0$ であるとする．$a < s < t < b$ ならば $g(s) < g(t)$ である.

(2) u, v を実数とする.「任意の実数 $q > 0$ に対し $u < v + q$ ならば，$u \leqq v$ である」の対偶を求め，それがなりたつことを示せ.

(3) (1) と (2) を使って，$a < s < t < b$ ならば $f(s) \leqq f(t)$ であることを示せ.

略解　**1** (1) $\boldsymbol{s}=(s,\sqrt{1-s^2})$, $\boldsymbol{t}=(\sqrt{1-t^2},t)$ とおけば，$s\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-s^2}\ t$ は内積 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}$ だから，その絶対値は $|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{t}|=1$ 以下である．
(2) $\alpha=\arcsin s$, $\beta=\arcsin t$ とおくと，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2}-st$ である．$|\alpha|\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $|\beta|\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから，$\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-t^2}\geqq st$ ならば $|\alpha+\beta|\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である．$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=s\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-s^2}\ t$ だから $\alpha+\beta=\arcsin(s\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-s^2}\ t)$ である．
2　(1)　e^x は凸関数だから $e^x\geqq1+x$ である．よって，$x>-n$ ならば $e^x=\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n\geqq\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ である．　$x<n$ ならば，$-x>-n$ だから $e^x=(e^{-x})^{-1}\leqq\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{-n}$ である．
(2)　$k=2,\dots,n-1$ に対し ${}_nC_{k+1}\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^{k+1}={}_nC_k\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^k\cdot\dfrac{n-k}{k+1}\dfrac{t}{n^2}$ である．$\dfrac{n-k}{k+1}\dfrac{t}{n^2}\leqq\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{t}{n^2}\leqq1$ だから，${}_nC_{k+1}\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^{k+1}\leqq{}_nC_k$ である．よって，$1\geqq\left(1-\dfrac{t}{n^2}\right)^n=1-n\cdot\dfrac{t}{n^2}+{}_nC_2\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^2\pm\cdots+(-1)^n{}_nC_n\left(\dfrac{t}{n^2}\right)^n\geqq1-\dfrac{t}{n}$ である．
(3)　アルキメデスの公理より，$|x|<m$ をみたす自然数 m がある．$n\geqq m$ ならば $-n<x<n$ だから (1) より，$e^x\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n\leqq\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq e^x$ である．さらに $n\geqq m^2\geqq m$ とすれば (2) より，$e^x\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)\leqq e^x\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n\leqq\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq e^x$ である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}=0$ だから，はさみうちの原理より $e^x=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ である．
3　$n=1$ の場合を示す．$f(\frac{1}{2})\geqq t$ なら $s_1=0$ だから，$f(s_1)=f(0)\leqq t\leqq f(\frac{1}{2})=f(s_1+\frac{1}{2})$ である．$f(\frac{1}{2})<t$ なら $s_1=\frac{1}{2}$ だから，$f(s_1)=f(\frac{1}{2})<t\leqq f(1)=f(s_1+\frac{1}{2})$ である．

n についてなりたつとし，$n+1$ の場合を示す．帰納法の仮定より $f(s_n)\leqq t\leqq f(s_n+\frac{1}{2^n})$ である．$f(s_n+\frac{1}{2^{n+1}})\geqq t$ なら $s_{n+1}=s_n$ だから，$f(s_{n+1})=f(s_n)\leqq t\leqq f(s_n+\frac{1}{2^{n+1}})=f(s_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}})$ である．$f(s_n+\frac{1}{2^{n+1}})<t$ なら $s_{n+1}=s_n+\frac{1}{2^{n+1}}$ だから，$f(s_{n+1})=f(s_n+\frac{1}{2^{n+1}})<t\leqq f(s_n+\frac{1}{2^n})=f(s_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}})$ である．

よって n に関する帰納法により，すべての自然数 $n\geqq1$ に対し $f(s_n)\leqq t\leqq f(s_n+\frac{1}{2^n})$ がなりたつ．
4　(1) (a,b) で $g'(x)=f'(x)+q>0$ だから，定理を $g(x)=f(x)+q\cdot x$ に適用すれば，$a<s<t<b$ ならば $g(s)=f(s)+q\cdot s<g(t)=f(t)+q\cdot t$ である．よって，$a<s<t<b$ ならば $f(s)<f(t)+q\cdot(t-s)$ である．
(2) 対偶は「$u>v$ ならば，実数 $q>0$ で $u\geqq v+q$ をみたすものが存在する」となる．$u>v$ ならば，$q=u-v>0$ は $u\geqq u=v+q$ をみたすから，対偶がなりたつ．
(3) $a<s<t<b$ とする．$q>0$ を実数とし，(1) を $\dfrac{q}{t-s}>0$ に適用すれば $f(s)<f(t)+\dfrac{q}{t-s}\cdot(t-s)=f(t)+q$ がなりたつ．よって任意の $q>0$ に対し $f(s)<f(t)+q$ がなりたつから，(2) より $f(s)\leqq f(t)$ である．