2014 年度冬学期 数学 I 期末試験問題

2 月 6 日 (金) 15:05–16:35 (90 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚，解答用紙　2 枚（4 ページ），計算用紙 1 枚
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません．
・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください．

問題 1　微分方程式 $y'^2 + 4x^2y^2 = 4x^2$ について，次の問に答えよ．
(1) 一般解 y を求めよ．
(2) 初期条件 $y(0) = 1$ をみたす解 $y = f(x)$ を求めよ．値 $f(\sqrt{\pi})$ も求めよ．

問題 2　数列 (S_n) を $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ で定める．次の問に答えよ．
(1) 極限 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．
(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(S_n - S)$ を求めよ．

問題 3　xy 平面内の閉円板 $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ を D で表わす．n で自然数を表わす．
積分 $I = \displaystyle\int_D y^n dxdy$ について次の問に答えよ．
(1) x で先に積分する逐次積分の公式を使って，I の値をベータ関数の値として表わせ．
(2) 極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ への変数変換公式を適用して，
2 変数関数 r, θ の重積分として I を表わせ．
(3) (2) で求めた積分を逐次積分で計算し，I の値をベータ関数の値として表わせ．
(4) (1) の答と (3) の答が等しいことをベータ関数の公式を使って確かめよ．

問題 4　数列 (a_n) を $a_0 = 1,\ a_1 = 2$ と漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定める．
(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ が収束することを示せ．
(2) 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ の収束半径を求めよ．
(3) 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ が収束する範囲で，関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ で定める．
2 変数の多項式 $F(X, Y)$ を使って，$f''(x)$ を $F(f(x), f'(x))$ として表わせ．

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい.

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります.

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください.

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

略解　**1** (1) 移項して両辺の平方根をとれば $\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=\pm 2x$ だから，両辺積分して $\arcsin y=\pm x^2+C$．よって一般解 $y=\sin(\pm x^2+C)$ が得られる．
(2) (1) で $x=0, y=1$ とおけば $C=\dfrac{\pi}{2}$ だから，初期条件 $y(0)=1$ をみたす解 $f(x)$ は $f(x)=\sin(\pm x^2+\dfrac{\pi}{2})=\cos(\pm x^2)=\cos x^2$．$x=\sqrt{\pi}$ での値は $\cos\pi=-1$．これが特殊解.

定数関数 $f(x)=1$ も条件をみたす．これが特異解.

2 (1) $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=[\log(x+\sqrt{1+x^2})]_0^1$

$=\log(1+\sqrt{2})$.
(2) 台形公式より，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ の 2 回導関数の絶対値の $[0,1]$ での最大値を M_2 とすると，$\left|S_n+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1)\cdot\dfrac{1}{n}-S\right|\leqq\dfrac{M_2}{12n^2}$ である．両辺を n 倍して極限をとれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n(S_n-S)-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right)=0$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(S_n-S)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ である.

3 (1) $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{4}$ なら $x^2\leqq y-y^2$ だから，
$I=2\displaystyle\int_0^1 y^n\sqrt{y-y^2}dy=2\int_0^1 y^{n+\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}dy=2B(n+\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.
(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおけば，$x^2+y^2\leqq y$ は $r^2\leqq r\sin\theta$ となり，$r\leqq\sin\theta$.
よって，$I=\displaystyle\int_{0\leqq r\leqq\sin\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\pi}r^n\sin^n\theta\cdot rdrd\theta$.
(3) $I=\displaystyle\int_0^\pi d\theta\int_0^{\sin\theta}r^{n+1}\sin^n\theta dr=\int_0^\pi\frac{\sin^{n+2}\theta}{n+2}\sin^n\theta d\theta=\frac{2}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta d\theta$
$=\dfrac{1}{n+2}B(\dfrac{1}{2},n+\dfrac{3}{2})$.
(4) $B(s+1,t)=\dfrac{s}{s+t}B(s,t)$ だから，$s=\dfrac{1}{2},t=n+\dfrac{3}{2}$ とおけば $B(\dfrac{3}{2},n+\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{2(n+2)}B(\dfrac{1}{2},n+\dfrac{3}{2})$.

4 (1) n に関する帰納法により，$a_n\leqq 2^n$ を示す．$n=0,1$ のときは a_0,a_1 の定義よりなりたつ．$n+1$ までなりたつとすると，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\leqq 2^{n+1}+2^n\leqq 2^{n+2}$ である．よって，すべての自然数 $n\geqq 0$ に対し $a_n\leqq 2^n$ がなりたつ．$\dfrac{a_n}{3^n}\leqq\dfrac{2^n}{3^n}$ で，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$ は収束するから，優級数の方法により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ も収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n=\exp 2x$ の収束半径は ∞ だから，優級数の方法により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ の収束半径も ∞ である.

(3) 項別微分より，$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$ であり，さらに $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} x^n$ である．よって漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ より，$f''(x) = f'(x) + f(x)$ である．

採点して気がついたこと，別の解法など．

全体によく出来ていました．3割ルールがあるので，思っていたより点数がよくないことがあるかもしれません．相対評価ということでやむを得ません．

問題 1. $\pm$ が抜けているものは減点しました．特異解に気がついていないものは減点しませんでした．

問題 2. $x = \tan\theta$ とおいて置換積分してもできます．

問題 4. 1. 数列 a_n の一般項を求めてもできます．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が $\geqq \dfrac{1}{3}$ だから収束するという答は誤りです．収束半径が $\geqq \dfrac{1}{2}$ だからという答は正解です．

2. ダランベールの公式で収束半径を求めてもできます．