

問題 2 (1) $p(x) = \sqrt{2} \left((x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{3!} (x + \frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{5!} (x + \frac{\pi}{4})^5 - \frac{1}{7!} (x + \frac{\pi}{4})^7 \right)$ としたのでは, $f(x) - p(x) = o((x + \frac{\pi}{4})^7)$ となってしまいます.

問題 3 (1) 去年の問題よりやさしく, 連鎖律をあてはめるだけでできる問題です.

(2) (1) で求めた式 $g_x(x, y) = f_x(x^2 - y^2, 2xy) \cdot 2x + f_y(x^2 - y^2, 2xy) \cdot 2y$ を適用できるのは, 合成関数の偏導関数なので $g_x(x, y)$ の偏導関数の計算にそのままでは適用できません. 適用できるのは合成関数 $f_x(x^2 - y^2, 2xy)$ と $f_y(x^2 - y^2, 2xy)$ の偏導関数の計算です.

記号で混乱している人が多かったです. $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 - y^2, 2xy)$ は偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ の x, y に $x^2 - y^2, 2xy$ を代入して得られる合成関数で, 合成関数 $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ の偏導関数 $g_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x^2 - y^2, 2xy))$ とは違うものを表しています. ことばでいうと, 偏導関数との合成関数と, 合成関数の偏導関数の違いです. また, $f_x(x^2 - y^2, 2xy)$ を x で偏微分しても $f_{xx}(x^2 - y^2, 2xy)$ にはなりません.

(3) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ から $g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0$ が導けることを, 誤った計算で示している人が意外と多かったです. この場合, $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ を正しく示していればその部分の点がありますが, $g_{xx}(x, y) + g_{yy}(x, y) = 0$ を正しく示したことにはなっていないので答えがあってもその部分の点はありません.

問題 4 (1) $f(x, y)$ が x についても y についても凸関数だからなりたつと書いた人が多かったですが, これでは y 軸や x 軸と平行な直線上で凸関数ということしかわかりません. 2 点を結ぶ直線は一般には斜めなので, そこに制限して得られる 1 変数関数を考えないといけません.

反例: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ とすると, $u(x, y) = w(x, y) = 2 > 0$ ですが, 直線 $x = y$ 上では $f(x, x) = -x^2$ は凹関数となります.

また, 2 変数の凸関数ということばを説明なしにつかっている人も多かったですが, これは示したい不等式そのものなので, それでは解答になりません.