2014 年度夏学期 **数学Ⅰ 期末試験問題**

9 月 1 日 (月) 10:55–12:25 (90 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　2 枚（4 ページ)、計算用紙 1 枚
・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
・なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください.

問題 1　2 変数 x, y の関数 $f(x,y)$ を，$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy^2$ で定める.
(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ と 2 次の偏導関数 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ を求めよ.
(2) $z = f(x,y)$ のグラフの点 $(1,1,f(1,1))$ での接平面を求めよ.
(3) $f(x,y)$ が極値をとりうる点あるいは峠点となりうる点 (x,y) をすべて求めよ.
(4) (3) でもとめた点で極大値，極小値をとるかあるいは峠点となるか判定せよ.
注意：(3) と (4) では，必ず，もとの変数 x, y での偏導関数や高次偏導関数による極値判定法を使って解答してください．ほかの方法でもできますが，極値判定法を理解し使えるかを見るための問題なので，それ以外の方法で解いたものは**採点しません**．ほかの方法を検算に使うのは構いません.

問題 2　$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおく.
(1) $f(x) = p(x) + o(x^7)$ をみたす 7 次式 $p(x)$ を求めよ.
(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{10}$ ならば $|f(x) - p(x)| \leqq \dfrac{1}{10^m}$ となる自然数 $m \geqq 0$ のうちなるべく大きいものを 1 つ求めよ.
　テイラーの定理をどのように使うかを**明記して**ください．この点が不明確な答案は答があっていても減点します.

問題 3　$f(x,y)$ を $(x,y) \neq (0,0)$ で定義された 2 回連続微分可能な関数とし，
　合成関数 $f(x^2 - y^2, 2xy)$ を $g(x,y)$ で表わす.
(1) 偏導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$ を，偏導関数との合成関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2-y^2, 2xy)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2-y^2, 2xy)$ を使って表わせ.
(2) 関数 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$ を，$f(x,y)$ の 2 階までの偏導関数を使って表わせ.
(3) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とする．関数 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ を求めよ.

問題 4　$f(x,y)$ を平面全体で定義された 2 回連続微分可能な関数とし，

$$u(x,y) = f_{xx}(x,y),\ v(x,y) = f_{xy}(x,y),\ w(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

とおく．すべての (x,y) に対し $u(x,y)w(x,y) - v(x,y)^2 > 0,\ u(x,y) > 0$ とする.
(1) 平面の 2 点 $(p,q) \neq (r,s)$ に対し，$0 < t < 1$ なら

$$f((1-t)p + tr, (1-t)q + ts) < (1-t)f(p,q) + tf(r,s)$$

であることを示せ.
(2) $f(0,0) = a, f_x(0,0) = b, f_y(0,0) = c$ とおく．すべての $(x,y) \neq (0,0)$ に対し

$$f(x,y) > a + bx + cy$$

であることを示せ.

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください.

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第nページに，問題nを解答してください.

略解　**1** (1) $f(x,y)=x^2+2y^2-xy^2$ だから，
$f_x(x,y)=2x-y^2,\ f_y(x,y)=4y-2xy.$
$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=-2y,\ f_{yy}(x,y)=4-2x.$

(2) $f(1,1)=2,\ f_x(1,1)=1,\ f_y(1,1)=2$ だから
接平面は $z-2=(x-1)+2(y-1)$. 移項すれば $z=x+2y-1.$

(3) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ とすると，$2x-y^2=4y-2xy=0.$
よって，求める点は $(x,y)=(0,0)$ と $(2,\pm 2)$.

(4) $(x,y)=(0,0)$ のとき，ヘッセ行列 $\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$ の行列式は $8>0$ で，
$f_{xx}(0,0)=2>0$ だから，$(x,y)=(0,0)$ で極小値をとる．

$(x,y)=(2,\pm 2)$ のとき，ヘッセ行列 $\begin{pmatrix}2&\mp 4\\\mp 4&0\end{pmatrix}$ の行列式は $-16<0$ だから，
$(x,y)=(2,\pm 2)$ は峠点.

2　(1) $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$ だから，

$p(x)=1+x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^2}{6!}-\dfrac{x^7}{7!}.$

(2) $|f^{(8)}(x)|=|f(x)|\leqq\sqrt{2}$ だから，テイラーの定理より，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{10}$ で
$|f(x)-p(x)|\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{8!}\dfrac{1}{10^8}=\dfrac{\sqrt{2}}{40320}\dfrac{1}{10^8}<\dfrac{1}{10^{12}}$ である．よって，$m=12.$

3 (1) 連鎖律より

$$\begin{cases} g_x(x,y)=f_x(x^2-y^2,2xy)\cdot 2x+f_y(x^2-y^2,2xy)\cdot 2y,\\ g_y(x,y)=-f_x(x^2-y^2,2xy)\cdot 2y+f_y(x^2-y^2,2xy)\cdot 2x. \end{cases}$$

(2)

$$g_{xx}(x,y)=f_x(x^2-y^2,2xy)\cdot 2+\frac{\partial}{\partial x}f_x(x^2-y^2,2xy)\cdot 2x+\frac{\partial}{\partial x}f_y(x^2-y^2,2xy)\cdot 2y.$$

右辺に (1) をもう 1 度適用すると

$$\begin{aligned} =&f_x(x^2-y^2,2xy)\cdot 2+\big(f_{xx}(x^2-y^2,2xy)\cdot 2x+f_{xy}(x^2-y^2,2xy)\cdot 2y\big)\cdot 2x\\ &\quad+\big(f_{yx}(x^2-y^2,2xy)\cdot 2x+f_{yy}(x^2-y^2,2xy)\cdot 2y\big)\cdot 2y\\ =&2\cdot f_x(x^2-y^2,2xy)+4x^2\cdot f_{xx}(x^2-y^2,2xy)\\ &\qquad+8xy\cdot f_{xy}(x^2-y^2,2xy)+4y^2\cdot f_{yy}(x^2-y^2,2xy). \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に

$$g_{yy}(x,y) = -2\cdot f_x(x^2-y^2,2xy) + 4y^2\cdot f_{xx}(x^2-y^2,2xy) - 8xy\cdot f_{xy}(x^2-y^2,2xy) + 4x^2\cdot f_{yy}(x^2-y^2,2xy)$$

だから，

$$g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y) = 4(x^2+y^2)\cdot(f_{xx}(x^2-y^2,2xy)+f_{yy}(x^2-y^2,2xy)).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}}\frac{-2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}}\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}^3}\Big) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

だから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

よって $g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)$ も 0.

［別解］$g(x,y) = \arcsin\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 2\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2f(x,y)$ だから，上の計算より $g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)=0$.

4 (1) $g(t) = f((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)$ が凸関数であることを示せばよい．連鎖律より

$$g'(t) = f_x((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)(r-p) + f_y((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)(s-q),$$

$$\begin{aligned} g''(t) =& u((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)(r-p)^2 \\ &+ 2v((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)(r-p)(s-q) \\ &+ w((1-t)p+tr,(1-t)q+ts)(s-q)^2 \end{aligned}$$

である．

実数 u,v,w,x,y に対し，$uw-v^2>0, u>0, (x,y)\neq(0,0)$ なら $ux^2+2vxy+wy^2 = u(x+\dfrac{v}{u}y)^2 + (w-\dfrac{v^2}{u})y^2 > 0$ だから，$g''(t)>0$ であり，$g(t)$ は凸関数である．

(2) (1) で $(p,q)=(0,0)\neq(r,s)=(x,y)$ とおけば，$g(t)=f(tx,ty)$ は凸関数だから，$g(1)>g(0)+g'(0)$ である．よって，$f(x,y)=g(1)>f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y = a+bx+cy$ である．