

2014 年度夏学期 数理科学 I 期末試験問題

7月22日(火) 10:55–12:25 (90分) 齋藤 毅

- ・問題用紙 1 枚, 解答用紙 2 枚 (4 ページ), 計算用紙 1 枚 .
- ・筆記用具, 計時機能のみの時計 以外もちこめません .
- ・なるべく, 答案用紙の第 n ページに, 問題 n を解答してください .
- ・解き方の指定がある問題については, それ以外の方法でといた答案是 **採点しません** . ほかの方法で検算するのは構いません .
- ・裏面の注意もよく読んでください .

問題 1 O を xy 平面の原点とし, 双曲線 $xy = 1$ 上の点 A, B を $A = (1, 1)$, $B = (e^{-1}, e)$ で定める . 双曲線 $xy = 1$ のうち始点が A 終点が B の部分を C とする .

1. 線積分 $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ をパラメータ表示 $x = e^{-t}, y = e^t$ を使って求めよ .
2. 線分 OA, OB をそれぞれ O を始点 A, B を終点とする曲線と考える . 線積分 $\int_{OA} y^2 dx + x^2 dy$ と $\int_{OB} y^2 dx + x^2 dy$ を求めよ .
3. D を C と線分 OA と OB でかこまれる部分とする . 1. と 2. の線積分と D 上の重積分について, グリーンの定理がなりたっていることを確かめよ .

問題 2 条件 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 5$ のもとでの関数 $2x^2 - 3y^2$ の極値問題について, ラグランジュ未定係数法を必ず使って次の問 1. と 2. に答えよ .

1. 極値をとりうる点をすべて求めよ .
2. さらに $x > 0$ とする . 1. で求めた各点で, 極大値をとるか極小値をとるかそれとも極値をとらないか判定せよ .

問題 3 uv 平面の点 (u, v) を xy 平面の点 $(x, y) = (uv, (1-u)v)$ にうつす写像 $F(u, v)$ を考える .

1. 写像 $F(u, v)$ によって, uv 平面の直線 $u = 1$ が xy 平面のどのような図形にうつされるかもとめよ .
2. 写像 $F(u, v)$ によって, xy 平面の直線 $x + y = 1$ にうつされる uv 平面の点全体のなす図形をもとめよ .
3. 写像 $F(u, v) = (uv, (1-u)v)$ による変数変換を必ず使って積分 $\int_{x \geq 0, (x+y)^2 \leq y} y dx dy$ を u, v に関する重積分として表わせ .
変数変換公式が適用できる理由も確認し, それを明記してください .
4. 3 でもとめた u, v に関する重積分の値を求めよ .

注 意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかなるべくくわしく書いて下さい。

答があっても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください。

なるべく，答案用紙の第 n ページに，問題 n を解答してください。

解き方の指定された問題は，その方法を理解しているかを試験するための問題なので，それ以外の方法でといた答案は採点しません．ほかの方法で検算するのは構いません．

1 1.

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (e^{2t} \cdot (-e^{-t}) + e^{-2t} e^t) dt = [-e^t - e^{-t}]_0^1 = 2 - e - e^{-1}.$$

2.

$$\begin{aligned} \int_{OA} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}, \\ \int_{OB} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^1 ((e^2 t)^2 \cdot e^{-1} + e^{-2} t^2 \cdot e) dt = \frac{1}{3}(e + e^{-1}). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_D (-2y + 2x) dx dy &= \int_{0 \leq x \leq 1, x \leq y, y \leq e^2 x, y \leq \frac{1}{x}} 2(x - y) dx dy \\ &= \int_0^{e^{-1}} dx \int_x^{e^2 x} 2(x - y) dy + \int_{e^{-1}}^1 dx \int_x^{\frac{1}{x}} 2(x - y) dy \\ &= \int_0^{e^{-1}} -(e^2 x - x)^2 dx + \int_{e^{-1}}^1 -\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 dx \\ &= -(e^4 - 2e^2) \int_0^{e^{-1}} x^2 dx + \int_{e^{-1}}^1 2 - \frac{1}{x^2} dx - \int_0^1 x^2 dx \\ &= -(e^4 - 2e^2) \frac{e^{-3}}{3} + 2(1 - e^{-1}) + (1 - e) - \frac{1}{3} \\ &= -\left(\frac{1}{3} + 1\right)e + \left(2 + 1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - 2\right)e^{-1} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}(e + e^{-1}) \end{aligned}$$

で, これは 1. と 2. でもとめた $\int_C - \int_{OB} + \int_{OA} = 2 - e - e^{-1} - \frac{1}{3}(e + e^{-1}) + \frac{2}{3}$ と等しい.

2 1. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2, p(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 5,$

$F(x, y, t) = 2x^2 - 3y^2 - t(x^2 + 2xy + 2y^2 - 5)$ とおく.

$F_x(x, y, t) = 4x - t(2x + 2y), F_y(x, y, t) = -6y - t(2x + 4y),$

$F_t(x, y, t) = -(x^2 + 2xy + 2y^2 - 5)$ である.

$F_x = F_y = 0$ の解は $\det \begin{pmatrix} 4x & 2x + 2y \\ -6y & 2x + 4y \end{pmatrix} = 4(2x(x + 2y) + 3y(x + y)) = 4(2x^2 + 7xy + 3y^2) = 0$ をみたく. これは $(2x + y)(x + 3y)$ と因数分解できるから. $y = -2x, x = -3y$ を $F_t = 0$ に代入すれば, それぞれ $(1 - 4 + 8)x^2 = 5x^2 = 5, (9 - 6 + 2)y^2 = 5y^2 = 5$ となる. したがって, 極値をとりうる点は $(x, y) = (\pm 1, \mp 2), (\pm 3, \mp 1)$ の 4 つである.

2. $x > 0$ だから, $(x, y) = (1, -2), (3, -1)$ であり, そのとき $t = -2, 3$ である.

$F_{xx}(x, y, t) = 4 - 2t, F_{xy}(x, y, t) = -2t, F_{yy}(x, y, t) = -6 - 4t, p_x(x, y) = 2x + 2y, p_y(x, y) = 2x + 4y$ だから

$F_{xx}(x, y, t)p_y(x, y)^2 - 2F_{xy}(x, y, t)p_x(x, y)p_y(x, y) + F_{yy}(x, y, t)p_x(x, y)^2 = (4 - 2t)(2x + 4y)^2 + 4t(2x + 2y)(2x + 4y) + (-6 - 4t)(2x + 2y)^2$ である .

$(x, y, t) = (1, -2, -2)$ ではこの値は正だから $(x, y) = (1, -2)$ では極小値をとり , $(x, y, t) = (3, -1, 3)$ では負だから $(x, y) = (3, -1)$ では極大値をとる .

3 1. $u = 1$ ならば $y = (1 - u)v = 0$ である . したがって , 直線 $u = 1$ の点は x 軸上の点にうつされる .

逆に x 軸上の任意の点 $(x, 0)$ は $(u, v) = (x, 1)$ の $F(u, v)$ による像である . よって求める図形は x 軸全体である .

2. $(x, y) = (uv, (1 - u)v)$ なら $x + y = uv + (1 - u)v = v$ だから , $(x, y) = F(u, v)$ が $x + y = 1$ をみたすなら $v = 1$ である . 逆に $v = 1$ とすると , $(x, y) = F(u, 1) = (u, 1 - u)$ は直線 $x + y = 1$ 上にある . よって , もとめる図形は直線 $v = 1$ である .

3. $(x + y)^2 \leq y$ とすると $(x, y) = (uv, (1 - u)v)$ とすれば $v^2 \leq (1 - u)v$ である . さらに $x = uv \geq 0$ とすれば , $v \geq v^2 + uv \geq 0$ である . よって , $v \neq 0$ なら $u \geq 0, u + v \leq 1$ である .

uv 平面の3角形 $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1$ と xy 平面の $x \geq 0, (x + y)^2 \leq x$ の部分は $v = 0$ の部分をのぞき 1対1に対応する . $v = 0$ の部分は面積0でヤコビアンは $\det \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1 - u \end{pmatrix} = v$ だから , 変数変換公式より

$$\int_{x \geq 0, (x+y)^2 \leq y} y dx dy = \int_{u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1} (1 - u)v^2 du dv.$$

4.

$$= \int_0^1 dv \int_0^{1-v} (1 - u)v^2 du = \int_0^1 \frac{1 - v^2}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15}.$$