2013年度冬学期 数学Ⅰ 期末試験問題

2月10日 (月) 15:05–16:35 (90分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　2枚（4ページ)、計算用紙1枚
・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
・なるべく，答案用紙の第nページに，問題nを解答してください．

問題1　微分方程式 $xy' + 1 = y^2$ について，次の問に答えよ．
(1) 一般解を求めよ．
(2) 初期条件 $y(1) = 0$ をみたす解を求めよ．

問題2　数列 (S_n) を $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2n^2 - i^2}$ で定める．次の問に答えよ．
(1) 極限 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．
(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(S_n - S)$ を求めよ．

問題3　xy 平面内の部分 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \dfrac{1}{4},\ y \geqq 0$ を D で表わす．
積分 $I = \displaystyle\int_D xydxdy$ について次の問に答えよ．
(1) 逐次積分の公式を使って I の値を求めよ．
(2) 極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ への変数変換公式を適用して，
2変数 r, θ の関数の重積分として I を表わせ．
(3) (2) で求めた積分を逐次積分で計算し，I の値を求めよ．

問題4　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^n}$ が発散するか収束するか判定せよ．
その理由もできるだけくわしく書いてください．

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答えをもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには，その仮定がみたされていることの確認を明記してください.

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

なるべく，答案用紙の第nページに，問題nを解答してください.

略解　**1** (1) 移項すれば $\dfrac{y'}{y^2-1}=\dfrac{1}{x}$ だから，両辺積分して $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right|=\log|x|+C$．
よって $\dfrac{y-1}{y+1}=Cx^2$ だから，一般解 $y=\dfrac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$ が得られる．
(2) $x=1, y=0$ とおけば $C=-1$ だから，初期条件 $y(1)=0$ をみたす解は $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$．

2 (1) $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx=2\pi\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$．
(2) 台形公式より，$\sqrt{2-x^2}$ の 2 回導関数の絶対値の $[0,1]$ での最大値を M_2 とすると，$\left|S_n+\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\cdot\dfrac{1}{n}-S\right|\leqq\dfrac{M_2}{12n^2}$ である．両辺を n 倍して極限をとれば
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n(S_n-S)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\right)=0$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(S_n-S)=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ である．

3 (1) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\dfrac{1}{4}$ なら $y^2\leqq x-x^2$ だから，
$I=\displaystyle\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}xydy=\int_0^1x\cdot\frac{x-x^2}{2}dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{1}{24}$．
(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおけば，$x^2+y^2\leqq x$ は $r^2\leqq r\cos\theta$ となり，$r\leqq\cos\theta$．
よって，$I=\displaystyle\int_{0\leqq r\leqq\cos\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}}r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdrd\theta$.
(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos^5\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{24}[-\cos^6\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24}$．

4 収束する．

$x\geqq0$ なら，$x\leqq e^x$ だから $\dfrac{x^2}{10^x}\leqq\left(\dfrac{e^2}{10}\right)^x$ である．$\dfrac{e^2}{10}<\dfrac{9}{10}<1$ だから広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{e^2}{10}\right)^xdx$ は収束し，したがって優関数の方法より広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{10^x}dx$ も収束する．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^n}$ も収束する．

別解 1　$x\geqq0$ なら，$x\leqq e^x$ だから $\dfrac{n^2}{10^n}\leqq\left(\dfrac{e^2}{10}\right)^n<\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ である．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$ は収束するから，優級数の方法より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^n}$ も収束する．

別解 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$ だからダランベールの公式より，巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ の収束半径は 1 である．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^n}$ は収束する．

採点して気になったことなど．

1. 積分定数は定数としての意味しかないので，略解のように次々とおきかえていったほうが慣れるとわかりやすくなります．

$e^{\log x}$ を x に直していない人もいましたが，減点はしませんでした．

答は x の関数になります．

2. 積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx$ が表す面積を考えれば，その値はすぐにわかります．

台形公式を正しく使えた人は少なかったです．

3. 逐次積分は y での積分を先にすると楽です．

問題のとおりに変数を変換していない答案は減点しました．

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するという解答は誤りです．