

2013 年度夏学期 数学 I 期末試験問題

9 月 2 日 (月) 10:55–12:25 (90 分) 斎藤 毅

- ・問題用紙 1 枚、解答用紙 2 枚 (4 ページ)、計算用紙 1 枚
- ・筆記用具、計時機能のみの時計 以外もちこめません。
- ・なるべく、答案用紙の第 n ページに、問題 n を解答してください。

問題 1 2 変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を、 $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$ で定める。

- (1) 偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ と 2 次の偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ を求めよ。
- (2) $z = f(x, y)$ のグラフの点 $(1, 2, f(1, 2))$ での接平面を求めよ。
- (3) $f(x, y)$ が極値をとりうる点あるいは峠点となりうる点 (x, y) で $x \geq 0$ をみたくものをすべて求めよ。
- (4) (3) でもとめた点で極大値、極小値をとるかあるいは峠点となるか判定せよ。

注意：(3) と (4) では、必ず、もとの変数 x, y での偏導関数や高次偏導関数による極値判定法を使って解答してください。ほかの方法でもできますが、極値判定法を理解し使えるかを見るための問題なので、それ以外の方法で解いたものは採点しません。ほかの方法を検算に使うのは構いません。

問題 2 $f(x, y)$ を $(x, y) \neq (0, 0)$ で定義された 2 回連続微分可能な関数とし、合成関数 $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を $g(r, \theta)$ で表わす。

- (1) 偏導関数との合成関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を、偏導関数 $g_r(r, \theta)$, $g_\theta(r, \theta)$ を使って表わせ。
- (2) 関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を、 $g(r, \theta)$ の 2 階までの偏導関数を使って表わせ。
- (3) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ とする。
関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を求めよ。

問題 3 (1) $\arcsin x = a \cdot \sin x + b \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + o(x^3)$ をみたく実数 a, b を求めよ。

(2) (1) で求めた a, b に対し、極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left(\arcsin x - a \cdot \sin x - b \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ を求めよ。

(3) 次の条件 * をみたく自然数 $m \geq 0$ のうちなるべく小さいものを 1 つ求めよ。

$$* 0 \leq x \leq \frac{1}{10^m} \text{ ならば } \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right| \leq \frac{1}{10^{50}}.$$

問題 4 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を実数とし、 $f(x) = \sin x + \tan a \cdot \cos x$ を閉区間 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ で定義された関数と考える。

- (1) $f(x)$ の逆関数が存在するための a についての条件を求めよ。
- (2) $f(x)$ の逆関数が存在するとき、逆関数を $[-1, 1]$ で定義された関数 $\arcsin x$ を使って表わせ。

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注 意

答だけを書くのではなく、どのようにその答えをもとめたかなるべくくわしく書いて下さい。

答があっても、説明が不十分なものは減点することがあります。

講義中に解説した命題などを適用するときには、その仮定がみたされていることの確認を明記してください。

読みやすく、読んでわかりやすい答案を作成してください。

なるべく、答案用紙の第 n ページに、問題 n を解答してください。

略解 1 (1) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$ だから ,

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4y, \quad f_y(x, y) = 4y^3 + 4x.$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2.$$

(2) $f(1, 2) = 25, f_x(1, 2) = 12, f_y(1, 2) = 36$ だから

接平面は $z - 25 = 12(x - 1) + 36(y - 2)$.

(3) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ とすると , $x^3 + y = y^3 + x = 0$.

$y = -x^3$ を $y^3 + x = 0$ に代入すれば $x = x^9$.

よって $x = 0, \pm 1$ でそのとき $y = 0, \mp 1$ だから求める点は $(0, 0)$ と $(1, -1)$ の 2 つ .

(4) $(x, y) = (0, 0)$ のとき , ヘッセ行列 $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は < 0 だから ,

$(x, y) = (0, 0)$ は峠点 .

$(x, y) = (1, -1)$ のとき , ヘッセ行列 $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ の行列式は > 0 で $12 > 0$ だから ,

$(x, y) = (1, -1)$ で極小値をとる .

2 (1) 連鎖律より

$$(g_r(r, \theta) \quad g_\theta(r, \theta)) = (f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{aligned} (f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)) &= (g_r(r, \theta) \quad g_\theta(r, \theta)) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (g_r(r, \theta) \quad g_\theta(r, \theta)) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である . よって

$$\begin{cases} f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) = g_r(r, \theta) \cos \theta - g_\theta(r, \theta) \frac{\sin \theta}{r} \\ f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) = g_r(r, \theta) \sin \theta + g_\theta(r, \theta) \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

(2) (1) をもう 1 度適用して

$$\begin{aligned} f_{xx}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \left(g_r(r, \theta) \cos \theta - g_\theta(r, \theta) \frac{\sin \theta}{r} \right)_r \cos \theta - \left(g_r(r, \theta) \cos \theta - g_\theta(r, \theta) \frac{\sin \theta}{r} \right)_\theta \frac{\sin \theta}{r} \\ &= g_{rr}(r, \theta) \cos^2 \theta - g_{r\theta}(r, \theta) \frac{\sin 2\theta}{r} + g_{\theta\theta}(r, \theta) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + g_\theta(r, \theta) \frac{\sin 2\theta}{r^2} + g_r(r, \theta) \frac{\sin^2 \theta}{r}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_{yy}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= g_{rr}(r, \theta) \sin^2 \theta + g_{r\theta}(r, \theta) \frac{\sin 2\theta}{r} + g_{\theta\theta}(r, \theta) \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - g_\theta(r, \theta) \frac{\sin 2\theta}{r^2} + g_r(r, \theta) \frac{\cos^2 \theta}{r} \end{aligned}$$

だから ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) = g_{rr}(r, \theta) + g_{\theta\theta}(r, \theta) \frac{1}{r^2} + g_r(r, \theta) \frac{1}{r}.$$

$$(3) g(r, \theta) = \frac{1}{r} \text{ だから , (2) より}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}.$$

3 (1) $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + o(x^6), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$
 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + o(x^6)$ だから , $a + b = 1, \quad -\frac{a}{6} + \frac{b}{2} = \frac{1}{6}$ である .
よって , $a = b = \frac{1}{2}$.

(2) (1) より求める極限は $\frac{1}{120} \left(3 \cdot 3 - \frac{1}{2} (1 + 3 \cdot 15) \right) = -\frac{14}{120} = -\frac{7}{60}$.

(3) $|(\cos x)^{(6)}| = |-\cos x| \leq 1$ だから ,

テイラーの定理より $\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right| \leq \frac{x^6}{6!}$ である .

よって , $\frac{10^{-6m}}{6!} \leq \frac{1}{10^{50}}$ をみたく m を求めればよい .

移項すれば $10^{50} \leq 720 \cdot 10^{6m}$ となるから , $m = 8$ は条件をみたく .

4 (1) 逆関数が存在するための条件は $f(x)$ が単調であることである .

$f'(x) = \cos x - \tan a \cdot \sin x$ は $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ で単調減少で $f'(0) = 1 > 0$ だから ,

$f(x)$ が単調であるための条件は , $f(x)$ が単調増加であることであり

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tan a) \geq 0$ である . よって求める条件は $a \leq \frac{\pi}{4}$ である .

(2) $x = \sin y + \tan a \cdot \cos y$ とすると , $\cos a \cdot x = \cos a \sin y + \sin a \cos y = \sin(a+y)$ である . $0 < a \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ より $0 < a+y \leq \frac{\pi}{2}$ だから , 逆関数は $y = \arcsin(\cos a \cdot x) - a$ である .