2011 年度　数学 IB 演習問題　その 4

問題 1 1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束することを示せ.

3. $k \geq 3$ が自然数なら $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ は収束することを示せ.

問題 2 1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ の収束半径 r を求めよ．開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ を求めよ.

2. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ の収束半径 r を求めよ．開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ を求めよ.

3. 実数 a と自然数 $n \geq 0$ に対し，$\displaystyle\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ とおく．a が自然数でないとする．巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ の収束半径 r を求めよ．開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ で定める．$(1+x)\cdot f'(x) = a\cdot f(x)$ を示せ．関数 $\dfrac{f(x)}{(1+x)^a}$ を求め，$f(x)$ を求めよ.

4. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}$ の収束半径 r を求めよ．開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^{2n}$ を求めよ.

5. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ の収束半径 r を求めよ．開区間 $(-r,r)$ で定義された関数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ を求めよ.

問題 3 自然数の数列 (m_n) についての条件 (3.1) を次のように定める.

(3.1) 数列 (l_m) で，すべての自然数 n に対し $l_{m_n} = n$ でありすべての自然数 m に対し $m_{l_m} = m$ であるものが存在する.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ を絶対収束する級数とし，(m_n) を自然数の数列で条件 (3.1) をみたすものとする．数列 (b_n) を $b_n = a_{m_n}$ で定めると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ も絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n = \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ であることを示せ.