微分方程式、広義積分.

例 1：水漏れ

底面積が S の円筒形の容器に，一定のはやさで水を注ぐ．容器の底からは，たまった水の水圧に比例して水が漏れるとする．注ぎ始めの時刻を 0 としたとき，時刻 t でのたまった水の深さを求めよ．

解：たまった水の深さを時刻 t の関数と考え $f(t)$ で表わす．たまった水の体積は $v(t) = S \cdot f(t)$ である．単位時間にたまる水の体積を v_0 深さが x のときに漏れる水の量を単位時間あたり a とすると，$v'(t) = v_0 - af(t)$ である．これより，微分方程式

$$S \cdot f'(t) = v_0 - af(t)$$

が得られる．

解法：$x = f(t)$ とおき，移項すると，

$$S \cdot \frac{1}{v_0 - ax}\frac{dx}{dt} = 1$$

である．置換積分の公式より，

$$S\int \frac{1}{v_0 - ax}dx = t + C$$

である．したがって，

$$-\frac{S}{a}\log(v_0 - ax) = t + C$$

であり，

$$x = \frac{1}{a}(v_0 - C\exp(-\frac{a}{S}t))$$

である．$t = 0$ で $x = 0$ だから，

$$f(t) = \frac{v_0}{a}(1 - \exp(-\frac{a}{S}t))$$

が解である．

例 2：水漏れ

底面積が S の円錐を逆さにした容器に，一定のはやさで水を注ぐ．以下は上と同じ．

解：今度は，$v(t) = \frac{1}{3}S \cdot f(t)^3$ である．微分方程式は

$$S \cdot f(t)^2 f'(t) = v_0 - af(t)$$

となる．

解法：$x = f(t)$ とおき，移項すると，

$$S \cdot \frac{x^2}{v_0 - ax}\frac{dx}{dt} = 1$$

である．置換積分の公式より，

$$S\int \frac{x^2}{v_0 - ax}dx = t + C$$

である．

$$\frac{x^2}{v_0-ax} = \frac{1}{a^2}\frac{v_0^2-(v_0^2-(ax)^2)}{v_0-ax} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{v_0^2}{v_0-ax}-(v_0+ax)\right)$$

だから，左辺は

$$\frac{S}{a^2}\left(\frac{1}{v_0^2}\log(v_0-ax)-(v_0x+ax^2)\right)$$

今度は x を t の関数として表わすことはできなかったが，t を x の関数として表わすことはできた．解は，この関数の逆関数ということになる．

もう少し一般に，$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$ のようになる微分方程式を考える．このような形にかける微分方程式を，変数分離形という．変数分離形の微分方程式は

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int f(t)dt$$

のように変形できる．これで解けたと思う．

単振動

ばねを伸び縮みさせたときの力は，伸び縮みに比例するとする．ばねに重りをぶらさげて，延ばしてから手を離したときの重りの運動を求めよ．

重りの質量を m とし，ばねの伸び縮みと力の比例定数を k，重力加速度を g とする．ばねの伸びを x とすると，ばねにかかる力は，$-kx+mg$ である．ぶらさがってつりあっているときの長さを x_0 とすると，$-kx_0+mg=0$ だから，ばねにかかる力は，$-k(x-x_0)$ である．原点をとりかえて，つりあっている場所からの長さをあらためて x と書くことにすると，運動方程式より，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

である．$\dfrac{k}{m} = l^2$ とおくと，方程式は，$x'' = -l^2x$ となる．$x = A\cos lt + B\sin lt$ とおくと，これは確かに解である．

$t=0$ のときの伸びを x_1 とおく．速度は $x' = -lA\sin lt + lB\cos lt$ で，$t=0$ のときの速度 lB は 0 のはずだから，$B=0, A=x_1$ である．したがって，解は $x = x_1\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ である．

速度に比例する摩擦があるときを考えると，解は減衰振動になる．