11/1

計算法 II．変数変換，一般の場合。

座標変換

$x = g(s,t), y = h(s,t).$

対応 $(s,t) \mapsto (x,y)$ により，st 平面の部分 E と xy 平面の部分 D の間に 1 対 1 対応があるとすると，

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(g(s,t),h(s,t))|J(s,t)|dsdt.$$

ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

$$J(s,t) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\frac{\partial h(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}.$$

例 1.

$$\frac{\partial(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J(r,\theta) = r.$$

例 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = A.$$

ヤコビアンの幾何的意味：局所的な面積の拡大率

ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積 $= \left|\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$