

10/18

多変数関数の積分・定義

- ・ 逐次積分
- ・ 応用 (面積、体積、重心など)
- ・ 変数変換公式

定義 6章 § 1

一般の場合は大変なので、長方形の場合に説明する。 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ とし、 $f(x, y)$ を D で定義された連続関数とする。 $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b, c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_m = d$ は D の分割を定める。分割の細かさを $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}, c_1 - c_0, \dots, c_m - c_{m-1}$ の最大値と定める。各小長方形 $D_{ij} = \{(x, y) | a_{i-1} \leq x \leq a_i, c_{j-1} \leq y \leq c_j\}$ 内に点 (x_{ij}, y_{ij}) をとる。和

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

の分割を細かくしたときの極限を D 上の $f(x, y)$ の積分とよび、

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

と表す。2変数であることを強調するために重積分とよび、 $\iint_D f(x, y) dx dy$ と書くこともある。

収束について。 D_{ij} 上での $f(x, y)$ の最小値を m_{ij} 、最大値を M_{ij} とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}). \end{aligned}$$

これより、収束は、分割を細かくしたとき

$$(M_{ij} - m_{ij} \text{の最大値})(b - a)(d - c) \rightarrow 0$$

であることからしたがう。 $(M_{ij} - m_{ij})$ の最大値 $\rightarrow 0$ はコンパクト集合 D 上の連続関数が一様連続であるということの帰結だが、ここでは省略する。

線形性、加法性、正值性。

計算法：I. 逐次積分。

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (1)$$

[証明] 最初の等号を示す． $F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ とおくと，右辺は $\int_a^b F(x)dx$ として定義される．

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ の分割 $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b, c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_m = d$ をとる．

1変数の積分の加法性より，右辺は $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x, y)dy \right) dx$ $a_{i-1} \leq x \leq a_i, c_{j-1} \leq y \leq c_j$ での最大値，最小値をそれぞれ M_{ij}, m_{ij} とすると，

$$m_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x, y)dy \right) dx \leq M_{ij}(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

これの和をとり，極限をとればよい．

(1) の右辺をそれぞれ $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy, \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$ と表す．

幾何的意味：体積は切り口の面積の積分である．

D が $a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)$ で定まっているとき，

$$\int_{a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)} f(x, y)dx dy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy.$$