問題 (10/26)
2 変数 x, y の関数

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 4xy$$

について，次の問いに答えよ．
(1)　偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を求めよ．
(2)　関数 $f(x,y)$ のグラフの，$(x,y)=(1,2)$ での接平面の方程式を求めよ．
(3)　関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．
(4)　$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ の範囲での，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

問題 (10/26) の略解 **1**　(1)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x(x^2+y^2)-4y$.

(2)　$f(1,2)=25-8=17, f_x(1,2)=20-8=12, f_y(1,2)=40-4=36$ だから，接平面の方程式は $z=12(x-1)+36(y-2)+17=12x+36y-67$.

(3)　極値をもつための必要条件は $f_x(x,y)=4x(x^2+y^2)-4y=0$ かつ $f_y(x,y)=4y(x^2+y^2)-4x=0$. これをとくと，$x=y=0$ かまたは, $x^2+y^2=1$ かつ $x=y$. したがって，極値をとる可能性のある点は，$(x,y)=(0,0),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ の 3 つ.

$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は $-16<0$ だから，$(0,0)$ では極値をとらない. $\begin{pmatrix} f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) & f_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ f_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) & f_{yy}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ の行列式は $64>0$ だから，$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ では極小値 $1-2=-1$ をとる. $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ でも同様に極小値 -1 をとる.

(4)　(3) より，最小値をとりうる点は，$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ かまたは，境界上、つまり $x=\pm 1$ または $y=\pm 1$ をみたす点. 境界上の点での値が $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ より大きいことを示す. 対称性より，$y=1$ の場合を考えればよい. $f(x,1)=(x^2+1)^2-4x$ である. $x^2+1\geq|2x|$ であり，等号が成り立つのは $x=\pm 1$ である. したがって，$f(x,1)=(x^2+1)^2-4x\geq 4x^2-4x\geq -1$ であり，2 つめの不等号で等号が成り立つのは，$x=1/2$ である. したがって，すべての x に対し，$f(x,1)>-1$ であり，最小値は $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ である.

$-1<x<1, -1<y<1$ で極大値をとる点はないから，最大値をとる点は，境界上の点である. 境界上の最大値を求める. 対称性より，$y=1$ の場合を考えればよい. つまり，$f(x,1)=(x^2+1)^2-4x$ の $-1\leq x\leq 1$ での最大値を求めればよい. $f_{xx}(x,1)=12x^2+4>0$ だから $f(x,1)$ は下に凸で，最大値は $f(1,1)=4$ と $f(-1,1)=8$ の大きい方 8 である.

したがって，$-1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1$ での最大値は，$f(-1,1)=f(1,-1)=8$ であり，最小値は，$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ である.