2004 年度冬学期 数学 IB 試験対策問題

問題 **1.**

$$f(x,y) = (x^2+y^2+xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

とおく.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極大値，極小値をすべて求めよ.

(3) $x^2+y^2 \leq 4$ の範囲での $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ.

問題 **2.** xy 平面の部分 D を不等式 $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x$ で定める．重積分

$$\int_D \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

を，変数変換 $x = x, y = xt$ を使って求めよ.

問題 **3.** xy 平面の部分 D を不等式 $0 \leq y \leq x, (x-1)^2+y^2 \leq 1$ で定める．重積分

$$\int_D xy dxdy$$

を次のように 2 通りのやり方で求めよ.

(1) そのまま逐次積分する.

(2) 極座標に変換する.

問題 **4.** xyz 空間内の曲面 $z = \log\sqrt{x^2+y^2}$ のうち $0 \leq z \leq 1$ の部分の面積を S とする.

(1) S を重積分を使って表せ.

(2) S の値を求めよ.

略解. 1. (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + y - x(x^2+y^2+xy))e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y + x - y(x^2+y^2+xy))e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}.$$

(2) 極値をもったとすると $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ だから，極値をとりうる点は $(x,y) = (0,0),(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$ の 5 つ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 - 3x^2 - y^2 - 2xy - x(2x+y-x(x^2+y^2+xy)))e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 3y^2 - x^2 - 2xy - y(2y+x-y(x^2+y^2+xy)))e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = (1 - 2xy - x^2 - y(2x+y-x(x^2+y^2+xy)))e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}.$$

$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式は $2^2 - 1^2 > 0$ だから，$(0,0)$ で極小値 0 をとる．$\begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{xy}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & -2e^{-1} \\ -2e^{-1} & -4e^{-1} \end{pmatrix}$ の行列式は > 0 だから，$(1,1)$ で極大値 $3e^{-1}$ をとる．同様に $(-1,-1)$ でも極大値 $3e^{-1}$ をとる．$\begin{pmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{xy}(1,-1) & f_{yy}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ だから $(1,-1)$ では極値をとらない．同様に $(-1,1)$ でも極値をとらない．

(3) $x^2+y^2 = 4$ として，$x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta$ とおく．このとき，$f(x,y) = (4 + 4\cos\theta\sin\theta)e^{-2} = (4 + 2\sin 2\theta)e^{-2}$ となるから，$(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ で最大値 $6e^{-2}$ をとり，$(x,y) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ で最小値 $2e^{-2}$ をとる．$e > 2$ だから，$6e^{-2} < 3e^{-1}$ である．よって，これと (2) の結果より最大値は $f(1,1) = f(-1,-1) = 3e^{-1}$, 最小値は，$f(0,0) = 0$.

2. D と対応する xt 平面の部分は $E : 1 \le x \le 2, 0 \le t \le 1$. ヤコビアン $J(x,t)$ は

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial xt}{\partial x} & \frac{\partial xt}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & x \end{pmatrix} = x$$

だから，変数変換公式より，

$$\begin{aligned} \int_D \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_E \frac{x(xt)^2}{\sqrt{x^2+x^2t^2}}xdxdt = \int_{1\le x\le 2, 0\le t\le 1} \frac{x^3t^2}{\sqrt{1+t^2}}dxdt \\ &= \int_1^2 x^3 dx \cdot \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{15}{4}\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt. \end{aligned}$$

$u=\sqrt{1+t^2}+t$ とおくと，$t=\frac{1}{2}(u-\frac{1}{u}), \sqrt{1+t^2}=\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u}), \frac{dt}{du}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{u^2})$ だから、

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{4}(u-\frac{1}{u})^2 \cdot \frac{2}{u+\frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{2}(1+\frac{1}{u^2})du$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}+1} u - \frac{2}{u} + u^{-3}du = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} udu - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)).$$

したがって，求める積分は $\frac{15}{8}(\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1))$.

3.(1)
$$\int_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xydy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydy\right)dx$$
$$= \int_0^1 x\cdot\frac{x^2}{2}dx + \int_1^2 x\cdot\frac{2x-x^2}{2}dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_1^2 = \frac{1}{8}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{8} = \frac{7}{12}.$$

あるいは

$$\int_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} xydx\right)dy = \int_0^1 y\cdot\frac{(1+\sqrt{1-y^2})^2-y^2}{2}dy$$
$$= \int_0^1 y-y^3+y\sqrt{1-y^2}\ dy = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{3}[\cos^3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

(2)
$$\int_D xydxdy = \int_{0\le r\le 2\cos\theta, 0\le\theta\le\pi/4} r^2\cos\theta\sin\theta rdrd\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{16}{4}\cos^4\theta\cos\theta\sin\theta d\theta$$
$$= 4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}(1-\frac{1}{8}) = \frac{7}{12}.$$

4.(1)
$$S = \int_{1\le x^2+y^2\le e^2}\sqrt{1+(\frac{x}{x^2+y^2})^2+(\frac{y}{x^2+y^2})^2}dxdy.$$

(2)
$$S = \int_{1\le r\le e, 0\le\theta\le 2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\cdot rdrd\theta = 2\pi\int_1^e\sqrt{1+r^2}dr$$
$$= 2\pi\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e}\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt = \pi[\frac{1}{4}(t^2-\frac{1}{t^2})+\log t]_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e}$$
$$= \pi(e\sqrt{1+e^2}+\log(\sqrt{1+e^2}+e)-(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1))).$$