12/17 講義予定
計算法 II.　変数変換.
球と円柱の共通部分.

$$
\begin{aligned}
& 2\int_{(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_{0\le r\le\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2}rdrd\theta \\
= \ & 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1-r^2}rdr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\frac{1}{3}\sqrt{1-r^2}^3]_0^{\cos\theta} d\theta \\
= \ & \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)d\theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta)d\theta \\
= \ & \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}.
\end{aligned}
$$

一般の場合。座標変換
$x = g(s,t), y = h(s,t)$.
対応 $(s,t) \mapsto (x,y)$ により，st 平面の部分 E と xy 平面の部分 D の間に 1 対 1 対応があるとすると，

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f(g(s,t),h(s,t))|J(s,t)|dsdt.$$

ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial g(s,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

$$J(s,t) = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}\frac{\partial h(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial g(s,t)}{\partial t}\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}.$$

例 1.

$$\frac{\partial(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J(r,\theta) = r.$$

例 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = A.$$

ヤコビアンの幾何的意味：局所的な面積の拡大率
ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積 $= \left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$

$$\int_{\frac{1}{2}x \le y \le 2x, x+y \le \frac{3}{2}\pi} \cos\frac{2x-y}{3}dxdy$$

$x = 2s + t, y = s + 2t$ と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
&= \int_{s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq \frac{\pi}{2}} \cos s \cdot 3 ds dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}-t} \cos s ds \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}-t} dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 3.
\end{aligned}
$$

曲面の面積。([高・加] p.172, [金子]II 9.3 p.182, [小平]II §9.2 p.471)

$$
S = \int_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1} dxdy.
$$

例　単位球の表面積 (注意：これは広義積分)

$$
\begin{aligned}
S &= 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{\left(\frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy \\
&= 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} dxdy \\
&= 2 \int_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 4\pi [-\sqrt{1-r^2}]_0^1 = 4\pi
\end{aligned}
$$

面積の近似値　ベクトル $\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ f_x(x,y)h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ f_y(x,y)k \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積の和.

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ のはる平行四辺形の面積 S. $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と直交する．よって

$$
S \times (\mathbf{c} \text{ の長さ}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ のはる平行 6 面体の体積}) = |\det(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|.
$$

$$
S = (1 + a^2 + b^2)/\sqrt{1 + a^2 + b^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.
$$