1/21 講義予定

有理関数の積分 ([高・加] 3.3 p.78, [金子]I p.113, [小平] なし)

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2-1})$. 確めるには微分すればよい

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

式を思いつくにはどうすればよいか. $\int f(x,\sqrt{x^2-1})dx$, $x=\frac{t^2+1}{2t}=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), 1<t$ とおいて変数変換すればよい. $y=\frac{t^2-1}{2t}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2})=\frac{t^2-1}{2t^2}$, $t=x+y=x+\sqrt{x^2-1}$ よって,

$$\int f(x,\sqrt{x^2-1})dx = \int f(\frac{1+t^2}{2t},\frac{1-t^2}{2t})\frac{t^2-1}{2t^2}dt.$$

$f(x,y)=\frac{1}{y}$ のときは,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log t = \log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

変数変換を思いつくにはどうすればよいか。$y^2=x^2-1$ 漸近線は $y=\pm x$. 漸近線に平行な直線は $y=x+t$ と $x+y=t$ の 2 種類. $x+y=t$ との交点が $(x,y)=(\frac{t^2+1}{2t},\frac{t^2-1}{2t})$.

他の変数変換のしかた。$y^2=x^2-1$ の点 $(-1,0)$ をとおる直線は $y=t(x+1)$. これと $y^2=x^2-1$ との $(-1,0)$ 以外の交点は、$(x,y)=(\frac{1+t^2}{1-t^2},\frac{2t}{1-t^2})$.