数学 IB 演習 解答 (5/22)

問題 4.1

1.

$\cos x$ の Taylor 展開を用いると、すべての x に対し

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\sin tx}{5!}x^5$$

を満たす実数 $t = t(x)$(ただし $0 \le t \le 1$) が存在します。これを用いると

$$h(x) = \frac{1}{4!} + \frac{\sin tx}{5!}x = \frac{1}{24} + \frac{\sin tx}{5!}x$$

となり、

$$|h(x) - \frac{1}{24}| = |\frac{\sin tx}{5!}x| \le |\frac{1}{5!}x| \to 0 \quad (x \to 0)$$

なので、極限の値は $\frac{1}{24}$ です。

2.

Taylor 展開を用いると、すべての x に対し

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos tx}{6!}x^6$$

を満たす t(ただし $0 \le t \le 1$) が存在します。これを用いると

$$k(x) = \frac{1}{120} - \frac{\cos tx}{6!}x$$

となり、$x \to 0$ の極限の値は $\frac{1}{120}$ です。

3.

$$\tan x = \frac{xg(x) + x^5 k(x)}{f(x) + x^4 h(x)}$$

であることは、実際に計算すると確かめられます。これを代入すると

$$\frac{1}{x^5}\left(\tan x - \frac{xg(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)k(x) - g(x)h(x)}{(f(x) + x^4 h(x))f(x)}$$

となり、1,2 の結果と $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 1$ を用いると、$x \to 0$ での極限の値は $-\frac{1}{30}$ となります。

4.

実際に計算すると

$$\frac{1}{x^5}\left(xg(x) - f(x)(x + \frac{x^3}{3})\right) = \frac{1}{6}$$

となるので、$x \to 0$ の極限の値も $\frac{1}{6}$ です。このことと $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ より

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x\frac{g(x)}{f(x)} - (x + \frac{x^3}{3})\right) = \frac{1}{6}$$

となるので、3. の結果

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\tan x - x\frac{g(x)}{f(x)}\right) = -\frac{1}{30}$$

と足し合わせると

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\tan x - (x + \frac{x^3}{3})\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{2}{15}$$

となります。

問題 4.2

1.

Taylor 展開により、すべての x に対し

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin tx}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

を満たす実数 t(ただし $0 \leq t \leq 1$) が存在します。これと問題の式を比べると

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{\sin tx}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

と表せることになります。よって

$$0 \leq |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ですから、以前にやった

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x^m}{m!} = 0$$

(ここで x は固定して考える) を用いると、$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ がわかります。

2.

この段階では、極限

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

が収束するかどうかは不明です。しかし

$$\cos x - R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

の左辺が収束して $\cos x$ に等しいことが 1. で証明されたので、右辺も収束することがわかり

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

となります。

3.

まず

$$\int_0^x \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} dx = \log(1+x) - (-1)^n \int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx \tag{1}$$

です。一方、分子を因数分解すると

$$\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{(1+x)\left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right)}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} dx &= \int_0^x \left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right) dx \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (2)\end{aligned}$$

です。(1) と (2) を比べると、求める式を得ます。

4.

$|x| < a < 1$ を満たすような定数 a を取りましょう。このとき

$$\begin{aligned}0 \leq \left|\int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx\right| &\leq \int_0^x \left|\frac{x^n}{1+x}\right| dx \\ &\leq a^n \int_0^x \frac{dx}{1+x} \\ &= a^n \log(1+x)\end{aligned}$$

が成立します (ここで $|x| < 1$ より、$1+x > 0$ です)。$0 < a < 1$ なので $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ ですから

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

ということになります。

あとは 3. と同じような議論により

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

が言えます。