2010 年度第 4 学期 **代数と幾何 追試験問題**

7 月 27 日 (水) 13:30–15:30 (120 分) 斎藤 毅

- 問題用紙　1 枚、解答用紙　3 枚、計算用紙 1 枚
- 筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
- 解答用紙の第 n 枚めに，問題 n を解答してください.

$\mathbb{R}$ は実数体を表わす.

問題 1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ とする.

(1)　A の最小多項式と固有多項式を求めよ.

(2)　A の固有値をすべて求めよ.

(3)　A の各固有値に対し，固有空間と一般固有空間の次元を求めよ.

(4)　可逆行列 $P \in GL_5(\mathbb{R})$ で $J = P^{-1}AP$ が A のジョルダン標準形となるものを 1 つ求めよ．J も求めよ.

問題 2　$V = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 3\}$ を実数係数の 3 次以下の X の多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 線形空間とし，$\mathbb{R}$ 線形写像 $F\colon V \to \mathbb{R}^3$ を $F(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}$ で定める.

(1)　f_1, f_2, f_3 を $\mathbb{R}^3$ の標準基底の双対基底とし，g_1, g_2, g_3, g_4 を V の基底 $1, X, X^2, X^3$ の双対基底とする．F の双対写像 $F^*\colon (\mathbb{R}^3)^* \to V^*$ の f_1, f_2, f_3 と g_1, g_2, g_3, g_4 に関する行列表示を求めよ.

(2)　F の核 $W = \mathrm{Ker}(F)$ の基底を 1 つ求めよ.

(3)　$\bar{1}, \bar{X}, \overline{X^2}$ は商空間 V/W の基底であることを示せ.
　$\bar{F}\colon V/W \to \mathbb{R}^3$ で $F\colon V \to \mathbb{R}^3$ がひきおこす線形写像を表わす．V/W の元 x で $\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ をみたすものを，$\bar{1}, \bar{X}, \overline{X^2}$ の 1 次結合として表わせ.

(4)　$h_1, h_2, h_3 \in (V/W)^*$ を商空間 V/W の基底 $\bar{1}, \bar{X}, \overline{X^2}$ の双対基底とする．標準全射 $p\colon V \to V/W$ の双対写像 $p^*\colon (V/W)^* \to V^*$ により商空間の双対空間 $(V/W)^*$ を零化空間 $W^\perp$ と同一視する．h_1, h_2, h_3 を g_1, g_2, g_3, g_4 の 1 次結合として表わせ.

問題 3　V, W を 2 次元 $\mathbb{R}$ 線形空間とし，$x, x' \in V,\ y, y' \in W$ とする．次の条件 (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1)　x, x' は V の基底であり，y, y' は W の基底である.

(2)　$x \otimes y + x' \otimes y' = x'' \otimes y''$ をみたす $x'' \in V, y'' \in W$ は存在しない.

裏面の注意をもう一度よく読んでください

注　意

答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。

また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

解答用紙の第n枚めに，問題nを解答してください.

略解　**1** (1) $n \geq 1$ に対し $x_n = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ とおく．$A = \begin{pmatrix}1&1&1&0&-1\\0&-1&-1&-3&1\\0&1&0&4&0\\0&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0\end{pmatrix}$ だから，$x_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$x_6 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\4\\0\\-1\end{pmatrix}$ である．x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 は $\mathbb{R}^5$ の基底であり，$x_6 = 4x_4 - 2x_3 - 3x_2 + 2x_1$ だから，A の最小多項式と固有多項式はどちらも $X^5 - 4X^3 + 2X^2 + 3X - 2$ である．

(2)　$X^5 - 4X^3 + 2X^2 + 3X - 2 = (X-1)^3(X+1)(X+2)$ だから固有値は $1, -1, -2$ である．

(3)　固有値 $-1, -2$ についてはどちらも次元 1 である．固有値 1 については固有空間の次元は 1 で一般固有空間の次元は 3 である．

(4)　$p_3 = (A^2 + 3A + 2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$，$p_2 = (A-1)p_3$，$p_1 = (A-1)p_2$ とおくと，$p_2 = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ であり，$p_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$p_4 = \begin{pmatrix}3\\-3\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$p_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$ はそれぞれ固有値 $1, -1, -2$ の固有ベクトルである．よって，$P = \begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5\end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$ である．

2　(1)　$F(1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$F(X) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$F(X^2) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$F(X^3) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ だから，F の $1, X, X^2, X^3$ と標準基底に関する行列表示は $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$ である．したがって，F^* の f_1, f_2, f_3 と g_1, g_2, g_3, g_4 に関する行列表示はその転置 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ である．

(2)　$X^3 - X$．

(3)　$1, X, X^2, X^3 - X$ は V の基底だから，(2) より $\bar{1}, \bar{X}, \overline{X^2}$ は商空間 V/W の基底である．$x = \bar{1} - \bar{X} + 2\overline{X^2}$.

(4)　$h_1 = g_1, h_2 = g_2 + g_4, h_3 = g_3$.

3　(1)⇒(2)　$x \otimes y, x \otimes y', x' \otimes y, x' \otimes y'$ は $V \otimes W$ の基底であり，$ax \otimes y + bx \otimes y' + cx' \otimes y + dx' \otimes y' = x'' \otimes y''$ をみたす $x'' \in V, y'' \in W$ が存在するための条件は $ad = bc$ である．$1 \neq 0$ だから，$x \otimes y + x' \otimes y' = x'' \otimes y''$ をみたす $x'' \in V, y'' \in W$ は存在しない．

(2)⇒(1)　対偶を示す．(1) が成り立たなければ，$\dim\langle x, x'\rangle \leq 1$ か $\dim\langle y, y'\rangle \leq 1$ である．どちらかが 0 なら $x \otimes y = x' \otimes y' = 0$ である．$\dim\langle x, x'\rangle = 1$ とする．$x' = ax$ なら，$x \otimes y + x' \otimes y' = x \otimes (y + ay')$ である．そのほかの場合も同様である．