代数と幾何　演習問題

問題 1.1　１．行列 A の階数は，A 倍写像の像の次元である．この文について，次の問に答えよ．

（１）$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ とする．A 倍写像はどこからどこへの写像であるかを明らかにし，その定義を与えよ．

（２）A 倍写像の像の定義を，集合の記号 $\{\quad|\quad\}$ を使って表わせ．

（３）A 倍写像の像の次元の，定義とその求め方を説明せよ．

２．行列 A の階数と，転置行列 ${}^tA$ の階数は等しいことを証明せよ．

問題 1.2　A を正方行列とする．A の ij 成分を 1 で，それ以外の i 行目と j 列目の各成分を 0 でおきかえて得られる行列の行列式を Δ_{ij} とおく．行列 $\Delta(A) = (\Delta_{ij})$ の転置行列 ${}^t\Delta(A)$ を A の余因子行列とよぶ．

$$
{}^t\Delta(A)A = \det A \cdot I
$$

を示せ．

問題 1.3　回転行列の積を使って，三角関数 $\cos, \sin$ の加法公式を証明せよ．

問題 1.4　１．$\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式およびパラメータ表示とは何か説明せよ．

２．平面が $\mathbb{R}^3$ の原点を含むとき，その方程式およびパラメータ表示を，線型写像の核や像という言葉を使って説明せよ．

問題 1.5　１．$\mathbb{R}^3$ 内の平行 6 面体の体積を行列式を使って表わせ．

２．１に対する答の証明を与えよ．

略解

1． 1.（1）A 倍写像とは，$x \in \mathbb{R}^n$ に $Ax \in \mathbb{R}^m$ を対応させることで定まる，線型写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ のことである．

（2）A 倍写像の像とは，この写像の像だから，集合としては，$\mathrm{Im}A = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$ のことである．

（3）$\mathrm{Im}A$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であり，その基底の元の個数が，その次元である．$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ とすると，$\mathrm{Im}A$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ で生成される．したがって，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ の中から，1 次独立になるベクトルの集合のうち元の個数が最大になるものを選べば，その個数が A 倍写像の像の次元である．

2．r を行列 A の階数とする．$\dim \mathrm{Ker}A = n - r$ だから，$\mathbb{R}^n$ の基底 $x_1, \ldots, x_n$ で，$x_{n-r+1}, \ldots, x_n$ が $\mathrm{Ker}A$ の基底であるようなものがある．このとき，$y_1 = f(x_1), \ldots, y_r = f(x_r)$ は，$\mathrm{Im}A$ の基底だから，これを延長する $\mathbb{R}^m$ の基底 $y_1, \ldots, y_m$ がある．

行列 $P = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_m \end{pmatrix}$ はそれぞれ n 次，m 次の可逆行列であり，$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ となる．ただし，1 の個数は r であり，1 でない成分はすべて 0 である．${}^tP{}^tA{}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ となる．${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & \ldots & z_n \end{pmatrix}$ とすると，$z_1, \ldots, z_r$ は $\mathrm{Im}{}^tA$ の基底だから，${}^tA$ の階数も r である．

2． 行列式の線型性より，

$$\sum_i \Delta_{ij} a_{ij} = \det A$$

が得られる．同様に，$\sum_i \Delta_{ij} a_{ik}$ は，A の j 行目を，k 行目でおきかえて得られる行列の行列式である．$j \neq k$ なら，この行列は可逆でなく，したがって，その行列式は 0 である．よって，

$$\sum_i \Delta_{ij} a_{ik} = \begin{cases} \det A & j = k \text{ のとき} \\ 0 & j \neq k \text{ のとき} \end{cases}$$

が示された．これを行列で書くと ${}^t\Delta(A)A = \det A \cdot I$ となる．

3. 実数θに対し，原点を中心とする角θの回転は，回転行列$E(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$倍写像である．

$$\begin{aligned} E(\theta+\varphi) &= E(\theta)E(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから，加法公式$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \sin(\theta+\varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi$が得られる．

4. 1．平面の方程式：座標が方程式$ax+by+cz=d$をみたす点全体として，平面を表す．

パラメータ表示：位置ベクトルが$\mathbf{x} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + \mathbf{c}$として表されるような点全体として，平面を表す．

2．平面が$\mathbb{R}^3$の原点を含むとき，これは$\mathbb{R}^3$の2次元部分空間である．

このとき，平面の方程式は$ax+by+cz=0$となる．平面は，線型写像$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mathbf{x}$の核として表されている．

平面が$\mathbb{R}^3$の原点を含むとき，パラメータ表示は$\mathbf{x} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$とできる．平面は，線型写像$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$の像として表されている．

5. 1．$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$がはる平行6面体の体積は，行列$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$の行列式の絶対値である．

2．必要なら$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$の順番をいれかえて，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$の$\mathbb{R}^2$への射影が基底であるとしてよい．$\mathbf{c}$を，$\mathbf{c} + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$でおきかえても，平行6面体の体積と行列式$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$はどちらも変わらない．したがって$\mathbf{c}$は$z$軸に平行であるとしてよい．同様に，$\mathbf{a}$を$\mathbf{a} + t\mathbf{c}$で，$\mathbf{b}$を$\mathbf{b} + s\mathbf{c}$でおきかえてよいから，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$としてよい．

同様な議論により，$\mathbf{a}$はx軸に，$\mathbf{b}$はy軸に平行であるとしてよい．したがって，各辺が座標軸に平行な直方体の場合に帰着された．この場合には明らか．