2016 年度 代数学 III 期末試験問題

1 月 27 日（金）13:00-16:00 (180 分)　斎藤 毅

・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません．

・裏面の注意もよく読んでください．

問題 1 F を体，$K = F(S)$ を F 上の 1 変数有理関数体とし，拡大体 L を $L = K[T]/(T^4 - S)$ で定める．

1. 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

　以下，F として実数体 $\mathbf{R}$, 複素数体 $\mathbf{C}$, 位数が素数 p の有限体 $\mathbf{F}_p$ を考える．それぞれについて，次の問に答えよ．

2. $X^4 - 1 \in F[X]$ を既約多項式の積に分解せよ．
3. $T \in L$ の K 上の最小多項式を，$L[X]$ で既約多項式の積に分解せよ．
4. K 上の体の射 $L \to L$ の個数 $\sharp\mathrm{Mor}_K(L, L)$ を求めよ．
5. L が K の分離拡大とならない F をすべて求めよ．
6. L が L の K 上の共役をすべて含むような F をすべて求めよ．

問題 2 $L = \mathbf{C}(T)$ を複素数体上の 1 変数有理関数体とする．$S = T^4 + \dfrac{1}{T^4}$ とおき，L の部分体を $K = \mathbf{C}(S) \subset M = \mathbf{C}(T^4)$ で定める．次の問に答えよ．

1. 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．
2. T^4 の K 上の最小多項式を求めよ．T の K 上の最小多項式も求めよ．
3. L が K の Galois 拡大であることを示し，T の K 上の共役をすべて求めよ．
4. K と L の中間体 M' で，$M \cap M' = K$ と $MM' = L$ をみたすものを 1 つ求め，$M' = \mathbf{C}(V)$ をみたす元 $V \in M'$ を 1 つ与えよ．V の K 上の最小多項式も求めよ．

　以下，G を Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ とし，H, H' をそれぞれ M, M' に対応する部分群とする．

5. H と H' の位数を求めよ．
6. G の自明でない部分群をすべて求め，H と H' の生成元を使って表わせ．
7. G の自明でない部分群それぞれに対し，対応する中間体の $\mathbf{C}$ 上の生成元を 1 つ求めよ．中間体のうち K 上の Galois 拡大となるものをすべて求めよ．

問題 3 $p \neq 7$ を素数とし，位数が素数 p の有限体 $\mathbf{F}_p$ に 1 の原始 7 乗根 ζ_7 を添加して得られる体を $E = \mathbf{F}_p(\zeta_7)$ とする．

1. p ごとに拡大次数 $[E : \mathbf{F}_p]$ を求めよ．
2. p ごとに $\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ の $\mathbf{F}_p$ 上の最小多項式を求めよ．
3. $X^2 + 7 \in \mathbf{F}_p[X]$ が既約であるための p についての条件を，p についての合同式として求めよ．

問題 4 K を体，A を整域とし，$f\colon K \to A$ を単位元を単位元にうつす可換環の準同形とする．A を f によって K 線形空間と考え，A は K 線形空間として有限次元であるとする．

　1. A は体であることを示せ．

　2. $a \in A$ とし，K 線形写像 $m_a\colon A \to A$ を $m_a(x) = ax$ で定める．$K[a] = A$ ならば，K 線形写像 m_a の固有多項式は最小多項式と等しいことを示せ．

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかも，なるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください．

1 1. S は PID$K[S]$ の素元だから，$X^4 - S \in K[X]$ は既約であり，$1, T, T^2, T^3$ は L の K 上の基底である．よって $[L : K] = 4$.

2. $F = \mathbf{R}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 3 \mod 4$ のとき $(X-1)(X+1)(X^2+1)$.
 $F = \mathbf{C}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 1 \mod 4$ のとき $(X-1)(X+1)(X-\sqrt{-1})(X+\sqrt{-1})$.
 $F = \mathbf{F}_2$ のとき $(X-1)^4$.

3. $F = \mathbf{R}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 3 \mod 4$ のとき $X^4 - T^4 = (X-T)(X+T)(X^2+T^2)$.
 $F = \mathbf{C}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 1 \mod 4$ のとき $X^4 - T^4 = (X-T)(X+T)(X-\sqrt{-1}T)(X+\sqrt{-1}T)$.
 $F = \mathbf{F}_2$ のとき $X^4 - T^4 = (X-T)^4$.

4. $F = \mathbf{R}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 3 \mod 4$ のとき $\sharp\mathrm{Mor}_K(L, L) = 2$.
 $F = \mathbf{C}$ または $F = \mathbf{F}_p,\ p \equiv 1 \mod 4$ のとき $\sharp\mathrm{Mor}_K(L, L) = 4$.
 $F = \mathbf{F}_2$ のとき $\sharp\mathrm{Mor}_K(L, L) = 1$.

5. $F = \mathbf{F}_2$.

6. $F = \mathbf{C}$ と $p \equiv 1 \mod 4$ のときの $F = \mathbf{F}_p$ および $\mathbf{F}_2$.

2 1. $[L : K] = [L : M][M : K] = 4 \cdot 2 = 8$.

2. T^4 の最小多項式は根と係数の関係より $X^2 - SX + 1$．よって T の最小多項式は $X^8 - SX^4 + 1$.

3. T の K 上の共役は $\pm T, \pm iT, \pm T^{-1}, \pm iT^{-1} \in L$ の 8 つあるから L は K の Galois 拡大.

4. T を $\dfrac{1}{T}$ にうつす元 $\sigma \in G$ は位数 2. T を iT にうつす元 $\tau \in G$ は位数 4. $H = \langle \sigma \rangle,\ N = \langle \tau \rangle$ とおけば，$G = HN,\ H \cap N = 1$. N に対応する中間体は M だから，H に対応する中間体を M' とすれば $MM' = L,\ M \cap M' = K$. $T + \dfrac{1}{T} \in M'$ で，L は $\mathbf{C}(T + \dfrac{1}{T})$ の 2 次拡大だから $M' = \mathbf{C}(T + \dfrac{1}{T})$.
 $V = T + \dfrac{1}{T}$ とおけば $V^4 = S + 4V^2 - 2$ だから，最小多項式は $X^4 - 4X^2 - S + 2$.

5. $|H| = 2,\ |N| = 4$.

6. $G = H \ltimes N$ だから，$G = \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = \tau^4 = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle$.
 位数 2: $\langle \sigma \rangle, \langle \sigma\tau \rangle, \langle \sigma\tau^2 \rangle, \langle \sigma\tau^3 \rangle, \langle \tau^2 \rangle$ の 5 つ.
 位数 4: $\langle \sigma, \tau^2 \rangle, \langle \sigma\tau, \tau^2 \rangle, \langle \tau \rangle$ の 3 つ.

7. 順に $M' = \mathbf{C}(T + \dfrac{1}{T}),\ \mathbf{C}(T + \dfrac{i}{T}),\ \mathbf{C}(T - \dfrac{1}{T}),\ \mathbf{C}(T - \dfrac{i}{T}),\ \mathbf{C}(T^2),$
 $\mathbf{C}(T^2 + \dfrac{1}{T^2}),\ \mathbf{C}(T^2 - \dfrac{1}{T^2}),\ M = \mathbf{C}(T^4)$.
 Galois 拡大は $\mathbf{C}(T^2), \mathbf{C}(T^2 + \dfrac{1}{T^2}),\ \mathbf{C}(T^2 - \dfrac{1}{T^2}),\ M = \mathbf{C}(T^4)$.

3 1. $p \equiv 1 \bmod 7$ のとき：$[E : \mathbf{F}_p] = 1$, $p \equiv 6 \bmod 7$ のとき：$[E : \mathbf{F}_p] = 2$,
 $p \equiv 2, 4 \bmod 7$ のとき：$[E : \mathbf{F}_p] = 3$, $p \equiv 3, 5 \bmod 7$ のとき：$[E : \mathbf{F}_p] = 6$.

2. $p \equiv 1, 2, 4 \bmod 7$ のとき：$X - (\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4)$,
 $p \equiv 3, 5, 6 \bmod 7$ のとき：$(X - (\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4))(X - (\zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6)) = X^2 + X + 2$.

3. $X^2 + X + 2 = \dfrac{1}{4}((2X+1)^2 + 7)$ だから，$X^2 + X + 2$ が既約であることと $X^2 + 7 \in \mathbf{F}_p[X]$ が既約であることは同値．したがって求める条件は $p \equiv 3, 5, 6 \bmod 7$.

4 準備中