2次安定集合環と Kempe 同値

Quadratic stable set rings and Kempe equivalence

土谷 昭善

東邦大学・理学部

東京可換環論セミナー
2023 年 12 月 21 日

本講演は大杉英史氏（関西学院大学）との共同研究に基づく

イントロダクション

Perfect graph

Perfectly contractile graph

I_G の生成系

I_G の 2 次生成性

Kempe 同値の代数的判定法

G : $[d] = \{1, 2, \ldots, d\}$ 上の単純グラフ (ループ辺や多重辺がない)
$E(G)$: G の辺集合

- G の $V \subset [d]$ に関する誘導部分グラフ G_V
$\underset{\text{def}}{\iff}$ $E(G_V) = \{\{i, j\} \in E(G) : i, j \in V\}$
- グラフの族 $\{G_i\}_i$ に対し，G が $\{G_i\}_i$-free である
$\underset{\text{def}}{\iff}$ G は $\{G_i\}_i$ のいずれも誘導部分グラフとして持たない

Problem (禁止グラフによる特徴づけ)

グラフの特別なクラス $\mathcal{F}$ に対し，あるグラフの族 $\{G_i\}_i$ で次を満たすものを見つけよ．

$$G \in \mathcal{F} \iff G \text{ は } \{G_i\}_i\text{-free}$$

このとき，$\{G_i\}$ を $\mathcal{F}$ に関する禁止グラフという

グラフ G に対し，ある可換環 R_G を対応させる

Problem (可換環による特徴づけ)

グラフの特別なクラス $\mathcal{F}$ に対し，ある代数的性質 P で次を満たすものを見つけよ.

$$G \in \mathcal{F} \iff R_G \text{は} P \text{を満たす}$$

perfect graph と呼ばれる特別なグラフに対し，幾つかの可換環による特徴づけが知られている

- グレブナー基底，正規性，Gorenstein 性

今日は 2 次生成について考える

Conjecture (Ohsugi–Shibata–Tsuchiya)

$$\text{perfect graph } G \text{ が perfectly contractile} \iff \text{安定集合イデアル } I_G \text{ が 2 次生成}$$

主結果

- 一般のグラフ G に対し，I_G が 2 次生成となる同値条件を Kempe 同値という概念を使って与えた
- Everett–Reed による perfectly contractile graph の禁止グラフによる特徴づけの予想が正しければ，OST-conjecture が正しいことを示した
- 多くの perfectly contractile graph のクラスで予想を解決

時間が許せば最新の Kempe 同値に関する結果も紹介する．

参考文献

[1] H. Ohsugi, K. Shibata and A. Tsuchiya, Perfectly contractile graphs and quadratic toric rings, *Bull. Lond. Math. Soc.* **55** (2023), 1264–1274.

[2] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Kempe equivalence and quadratic toric rings, arXiv:2303.12824.

[3] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Examining Kempe equivalence via commutative algebra, in preparation.

- イントロダクション
- Perfect graph
- Perfectly contractile graph
- I_G の生成系
- I_G の 2 次生成性
- Kempe 同値の代数的判定法

- $C \subset [d]$: G のクリーク $\underset{\text{def}}{\iff} \forall i \neq j \in C, \{i, j\} \in E(G)$
  $\iff G_C$が完全グラフ
- $\omega(G) := \max\{|C| : C$ はクリーク $\}$: クリーク数
- $f : [d] \to [k]$: k 彩色 $\underset{\text{def}}{\iff} \forall \{i, j\} \in E(G), f(i) \neq f(j)$
- $\chi(G) :=$ k 彩色が存在する最小の k : 彩色数

一般に,

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

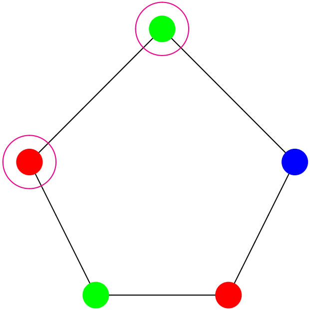
が成り立つ.

Definition

G が perfect $\underset{\text{def}}{\iff}$ G の任意の誘導部分グラフ H に対し,

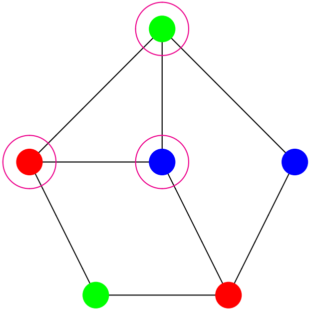
$$\omega(H) = \chi(H)$$

G:



$$\omega(G) = 2 < \chi(G) = 3$$

G:



$$\omega(G) = \chi(G) = 3$$

But G is NOT perfect.

- hole：長さが 5 以上の誘導部分サイクル
- antihole：hole の補グラフ
- odd hole (antihole)：長さが奇数の hole (antihole)

M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Ann. of Math.*, **164** (2006), 51–229.

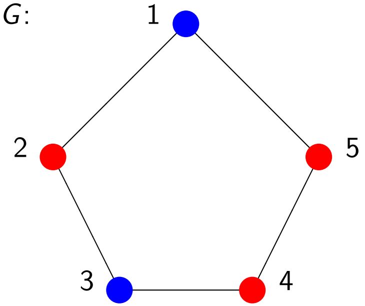
Theorem (Strong Perfect Graph Theorem)

$$G \text{ は perfect} \iff G \text{ は (odd hole, odd antihole)-free}$$

- $S \subset [d]$ が安定集合または独立集合

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall i, j \in S,\ \{i, j\} \notin E(G)$$
$$\iff G_S \text{ が孤立点のみ}$$

- $S(G)$: G の安定集合全体の集合



$\{1, 3\}$ 安定集合.　　$\{2, 4, 5\}$ 安定集合ではない.

$$S(G) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$$

$\mathbb{K}$: 体

Definition

G の安定集合環

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbb{K}[G] := \mathbb{K}\left[t_0 \prod_{i \in S} t_i : S \in \mathcal{S}(G) \right].$$

$R[G] := \mathbb{K}[x_S : S \in \mathcal{S}(G)]$ with $\deg x_S = 1$

全射環準同型 $\pi : R(G) \to K[G]$ を次で定義する：

$$x_S \mapsto t_0 \prod_{i \in S} t_i$$

$I_G = \ker \pi$: G の安定集合イデアル

このとき，I_G はトーリックかつ斉次イデアル

Theorem (cf. Ohsugi-Hibi)

G は perfect $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}[G]$ は compressed

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の逆辞書式順序に対して，I_G は スクエアフリーグレブナー基底を持つ

Remark

この結果は weak perfect graph theorem，つまり

$$G \text{ は perfect} \Leftrightarrow \overline{G} \text{ は perfect}$$

の証明を代数的に翻訳したもの．

Remark

$$\text{compressed} \Longrightarrow \text{正規}$$

$$\mathbb{K}[\Gamma(G)] := \mathbb{K}\left[t_0 \prod_{i\in S} t_i,\, t_0 \prod_{i\in S} t_i^{-1} : S \in S(G)\right]$$

$$\mathbb{K}[\Omega(G)] := \mathbb{K}\left[t_0 u \prod_{i\in S} t_i,\, t_0 u^{-1} \prod_{i\in S} t_i^{-1},\, t_0 : S \in S(G)\right]$$

Theorem (Ohsugi–Hibi, Hibi–T)

グラフ G に対し，次は同値：

1. $\mathbb{K}$ は perfect
2. $\overline{\mathbb{K}[\Gamma(G)]}$ は（正規）Gorenstein
3. $\mathbb{K}[\Gamma(G)]$ は正規 Gorenstein
4. $\mathbb{K}[\Omega(G)]$ は正規
5. $\mathbb{K}[\Omega(G)]$ は正規 Gorenstein

Question

G が perfect のとき，I_G はいつ 2 次生成となるか？

e.g.,

- comparability graph;
- almost bipartite graph;
- chordal graph;
- chordal bipartite graph の補グラフ.

イントロダクション

Perfect graph

Perfectly contractile graph

I_G の生成系

I_G の２次生成性

Kempe 同値の代数的判定法

$\{i,j\}$ が G の even pair

$\underset{\text{def}}{\iff}$ i と j を結ぶ chordless path の長さがすべて偶数

even pair $\{x,y\}$ を収縮する

$\underset{\text{def}}{\iff}$ i と j を同一視して辺をつけ直す（ループ辺や多重辺は消す）

G が even contractile

$\underset{\text{def}}{\iff}$ even pair をくり返し収縮することで完全グラフとなるもの

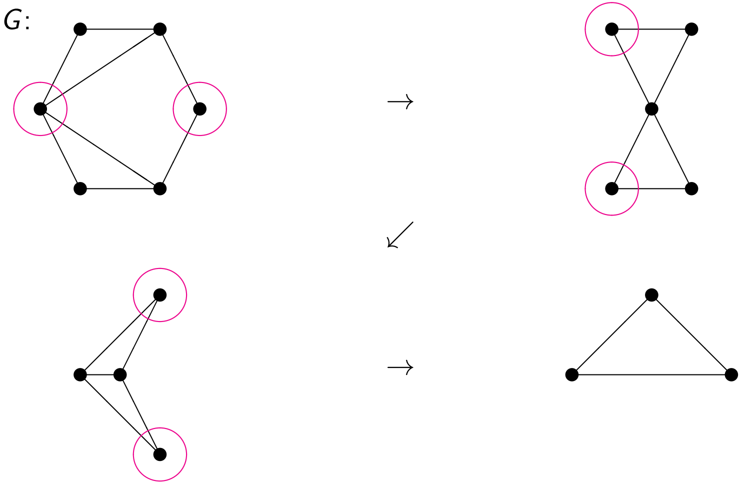
Definition (Bertschi)

G が perfectly contractile

$\underset{\text{def}}{\iff}$ 任意の誘導部分グラフが even contractile

Theorem (Bertschi)

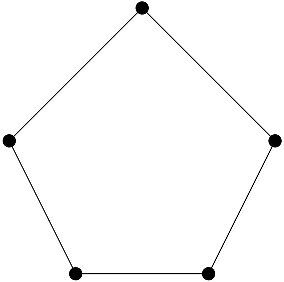
perfectly contractile $\Longrightarrow$ perfect



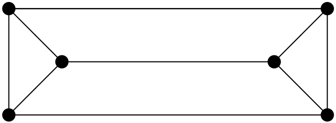
G は even contractile

特に，G は perfectly contractile

C_5:



$\overline{C_6}$:



C_5 と $\overline{C_6}$ は even pair を持たない

したがって，even contractile ではない

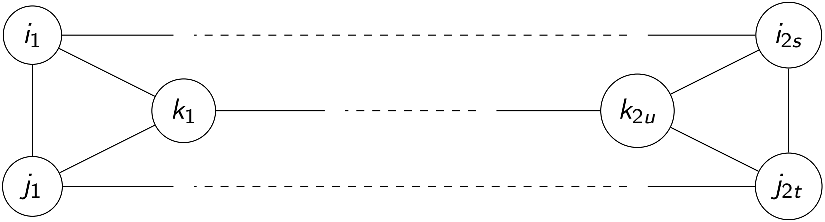
odd prism または odd stretcher $G_{s,t,u}$ とは頂点集合を

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{2s}, j_1, j_2, \ldots, j_{2t}, k_1, k_2, \ldots, k_{2u}\}$$

辺集合を

$$\begin{gathered}\{i_1, j_1\}, \{i_1, k_1\}, \{j_1, k_1\}, \{i_{2s}, j_{2t}\}, \{i_{2s}, k_{2t}\}, \{j_{2t}, k_{2s}\},\\ \{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{2s-1}, i_{2s}\},\\ \{j_1, j_2\}, \{j_2, j_3\}, \ldots, \{j_{2t-1}, j_{2t}\},\\ \{k_1, k_2\}, \{k_2, k_3\}, \ldots, \{k_{2u-1}, k_{2u}\}.\end{gathered}$$

とするグラフ



$G_{1,1,1} = \overline{C_6}$

Conjecture (Everett–Reed)

G は perfectly contractile
$\iff$ G は (odd hole, antihole, odd prism)-free

Theorem (Linhares Sales–Maffray–Reed)

$\Longrightarrow$ は正しい

Theorem (Bertschi)

以下のグラフは perfectly contractile：

- Meyniel graph
- perfectly orderable graph
- clique separable graph

Conjecture (Ohsugi–Shibata–T)

G が perfect graph のとき，次は同値：

1. G は perfectly contractile
2. G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
3. I_G は 2 次生成

Theorem (Ohsugi-Shibata–T)

$(3) \Longrightarrow (2)$ は正しい $((1) \Longrightarrow (2)$ は正しかった$)$

Theorem (Ohsugi–Shibata–T)

以下のグラフの安定集合イデアルは 2 次生成：

- Meyniel graph
- perfectly orderable graph（2 次グレブナー基底を持つ）
- clique separable graph（2 次グレブナー基底を持つ）

Koszul 性

一般に

$$\mathbb{K}[G] \text{ は Koszul} \Rightarrow I_G \text{は 2 次生成}$$

しかし,

$$I_G \text{は 2 次生成} \not\Rightarrow \mathbb{K}[G] \text{ は Koszul}$$

が成り立つとは限らない (cf. Matsuda)

Conjecture (Ohsugi–Shibata–T)

G が perfect graph のとき,

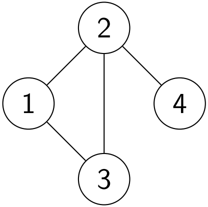
$$\mathbb{K}[G] \text{ は Koszul} \iff I_G \text{ は 2 次生成}$$

- antihole を持たない “ほとんど全て” の perfect graph は perfectly orderable graph のクリーク和と呼ばれるもの
- perfectly orderable graph のクリーク和は 2 次グレブナー基底を持つ，よって Koszul
- perfectly contractile graph で perfectly orderable graph のクリーク和で書けないものが見つかっていない

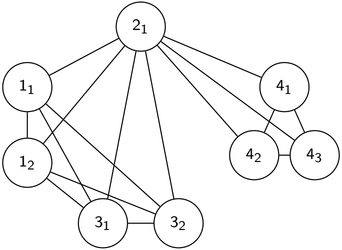
$[d]$ 上のグラフ G と $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}_{>0}^d$ に対し，グラフ $G_\mathbf{a}$ を次の操作で定義する：

- G の頂点 i を a_i 頂点の完全グラフ $G^{(i)}$ と取り替える．
- $\{i, j\} \in E(G)$ ならば，$G^{(i)}$ と $G^{(j)}$ の各頂点を経んで結ぶ．

この $G_\mathbf{a}$ を G の replication graph という．



G

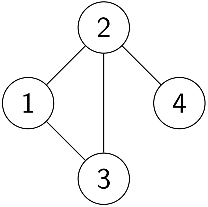


$G_\mathbf{a}$ with $\mathbf{a} = (2, 1, 2, 3)$

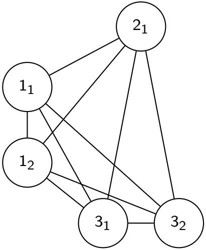
$[d]$ 上のグラフ G と $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ に対し，グラフ $G_{\mathbf{a}}$ を次の操作で定義する：

- G の頂点 i を a_i 頂点の完全グラフ $G^{(i)}$ と取り替える．ただし，$a_i = 0$ ならば G の頂点 i を消す.
- $\{i, j\} \in E(G)$ かつ $a_i, a_j > 0$ ならば，$G^{(i)}$ と $G^{(j)}$ の各頂点を経んで結ぶ.

つまり $G_{\mathbf{a}}$ は G の誘導部分グラフの replication graph



G



$G_{\mathbf{a}}$ with $\mathbf{a} = (2, 1, 2, 0)$

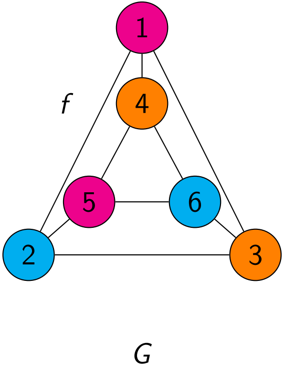
$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ と $G_\mathbf{a}$ の k 彩色 f に対し，$R[G]$ の単項式

$$\mathbf{x}_f := x_{S_1} x_{S_2} \cdots x_{S_k}$$

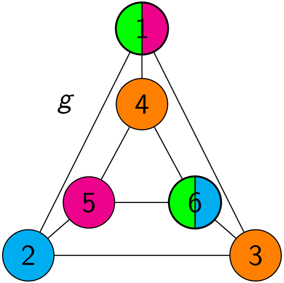
を対応させる．ここで,

$$S_\ell = \{j \in [d] : G^{(j)} \cap f^{-1}(\ell) \neq \emptyset\}$$

である．



$$\longleftrightarrow \qquad \mathbf{x}_f = x_{15} x_{26} x_{34}$$



$G_{(2,1,1,1,1,2)}$

$$\longleftrightarrow \qquad \mathbf{x}_g = x_{15}x_{26}x_{34}x_{16}$$

Theorem (Ohsugi–T)

一般の $[d]$ 上のグラフ G に対し,

$$I_G = \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の } k \text{ 彩色 } \rangle$$

k 彩色 $f:[d]\to[k]$ を一つ与え，２色 $1\le i<j\le k$ に対し，i と j で塗られている頂点に関する誘導部分グラフ $G_{f^{-1}(i)\cup f^{-1}(j)}$ の連結成分 H を一つ取ってくる．
$g:[d]\to[k]$ を

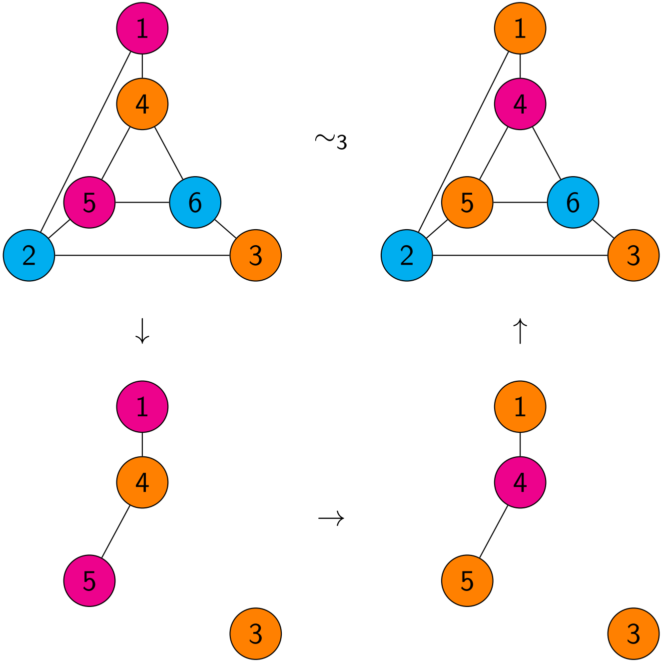
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\notin H \\ i & x\in H \text{ かつ } f(x)=j \\ j & x\in H \text{ かつ } f(x)=i \end{cases}$$

で定義することで，新しい k 彩色が得られる
（H 内の i と j の２色を入れ替える）

この操作を Kempe switching という
（4 色定理の証明で導入された古典的な操作）

２つの k 彩色 f,g が Kempe 同値 $f\sim_k g$
$\underset{\text{def}}{\iff}$ f から Kempe switching を繰り返すことで g を得る

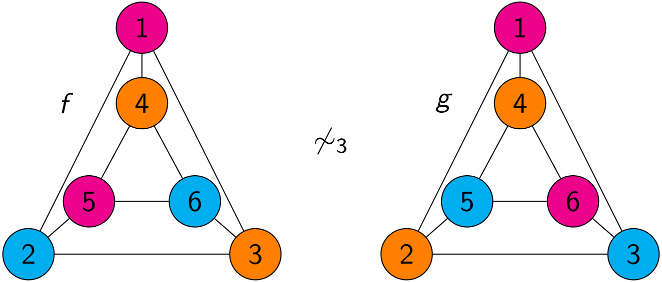
$\mathrm{kc}(G,k):=\{G$ の k 彩色全体 $\}/\sim_k$：Kempe クラス
$\mathrm{Kc}(G,k):=\sharp\mathrm{kc}(G,k)$



Theorem (Ohsugi–T)

一般の $[d]$ 上のグラフ G に対し，

$$I_G \text{が}\ 2\ \text{次生成} \iff \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \forall k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), \mathrm{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1$$



$$\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g = x_{15}x_{26}x_{34} - x_{16}x_{24}x_{35} \in I_G$$

は I_G の 2 次の二項式で割り切れない $\to I_G$ は 2 次生成ではない

Theorem (Bertschi)

G が perfectly contractile ならば,

$$\forall \mathbf{a} \in \{0,1\}^d, \forall k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), \mathrm{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1$$

Corollary

perfectly contractile graph のサブクラス $\mathcal{C}$ が，条件

$$\forall G \in \mathcal{C}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, G_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}$$

を満たすならば，任意の $G \in \mathcal{C}$ に対し I_G は 2 次生成である.

Conjecture (Ohsugi–Shibata–T)

G が perfect graph のとき，次は同値：

1. G は perfectly contractile
2. G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
3. I_G は 2 次生成

Corollary

Everett–Reed conjecture ((1) $\Leftrightarrow$ (2)) $\Rightarrow$ OST conjecture

Corollary

以下のグラフの安定集合イデアルは 2 次生成

- (dart, odd hole, antihole, odd prism)-free
- (odd hole, antihole, ~~odd~~ prism)-free
- (~~odd~~ hole, antihole, odd prism)-free
- Meniel graph
- perfectly orderable graph

主結果の証明から Kempe 同値かどうかを代数的に判定できる．
グラフ G に対し，

$$[I_G]_2 := \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0},\ f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色 } \rangle$$

を定義する．つまり，$[I_G]_2$ は I_G に属する 2 次の二項式で生成されるイデアル（良い記号があれば教えてください）．

Theorem (Ohsugi–T)

$$f \sim_k g \Leftrightarrow \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \in [I_G]_2$$

Kempe 同値の判定には $[I_G]_2$ は情報を持ちすぎている
（$G_{\mathbf{a}}$ の 2 彩色の情報を全て持っている）

新たにトーリックとは限らない二項式イデアルを定義する：

$$[I_G]_2 := \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0},\ f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色 } \rangle$$

$$J_G := \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g : \mathbf{a} \in \{0,1\}^d,\ f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色 } \rangle$$

つまり J_G は G の誘導部分グラフの 2 彩色から得られるイデアル

イデアル $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ と多項式 $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対し，I の f に関する飽和とはイデアル

$$I : f^\infty = \{g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] : \exists i > 0 \text{ such that } f^i g \in I\}$$

をいう．

Proposition

$$J_G : \mathbf{x}_\emptyset^\infty = [I_G]_2 : \mathbf{x}_\emptyset^\infty = I_G$$

Theorem (Ohsugi–T)

変数 $x_\emptyset$ が最小となる逆辞書式順序 $<$ に関する $[I_G]_2$ または J_G の被約グレブナー基底を $\mathcal{G}$ とする．このとき,

$$\mathcal{G}' = \{g/x_\emptyset^j : g \in \mathcal{G}, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x_\emptyset^j | g, x_\emptyset^{j+1} \not| g\}$$

は I_G のグレブナー基底である.

Theorem (Ohsugi–T)

$$f \sim_k g \Leftrightarrow \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \in [I_G]_2 \Leftrightarrow \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \in J_G$$