Graded Bourbaki ideals of graded modules

j.w.w. J. Herzog and D.I. Stamate

(arXiv: 2002. 09596)

2020年6月22日
東大可換環論セミナー

---

§1 Introduction

Fact (Bourbaki)

R : Noeth normal domain

M : f.g. torsionfree R-module of rank $r>0$

とすると

$\exists\, \varphi : R^{r-1} \to M$ and $\exists\, I$: ideal of R

s.t. $0 \to R^{r-1} \xrightarrow{\varphi} M \to I \to 0$ is exact

Bourbaki sequence of M   Bourbaki ideal of M

Philosophy:

"加群 M の性質は Bourbaki ideal I に遺伝する!!"

$\llcorner\!\!\triangleright$ 実際に、
- cohomology の消滅問題
- hypersurface 環上の MCM 加群解析
- Hilbert function
- Rees algebras of modules

⋮

等への様々な応用がある！

Rem
- Bourbaki seq. は M によって unique ではない！
- Bourbaki ideal も unique ではない！

Aim of this talk:

M : f.g. R-mod.
F : f.g. free R-mod. とし、
R-linear $\varphi : F \to M$ が与えられているとする。

このとき、
- sequence $0 \to F \xrightarrow{\varphi} M \to \operatorname{Coker}\varphi \to 0$ が Bourbaki seq. を導くかどうかの判定法？

(
- また Bourbaki seq. が与えられたとき、Bourbaki ideal を計算する方法？
)

Table of contents

§2. Preliminaries
§3. Characterization of Bourbaki seq.
§4. Bourbaki ideals of Koszul cycles.

以下、常に R は Noeth. normal domain とする.

§2 Preliminaries

M : f.g. R-mod. とする

lem2.1 $0 \to F \to M \to I \to 0$: Bourbaki sequence とすると、次が正しい。

(a) $\mathrm{ht}_R I \geq 2 \Rightarrow M \cong F \oplus I$

(b) R : UFD $\Rightarrow$ $\mathrm{ht}_R I \geq 2$ にとり直せる.

lem2.2. 次が正しい。

(a) M : torsionfree $\left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & Q(R) \otimes_R M \text{ is inj.} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & 1 \otimes x \end{array} \right)$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ass}_R M \subset \mathrm{Ass} R$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \to M \to \underset{\text{f.g. free}}{\ddot{F}}$

$\Leftrightarrow$ canonical map $M \longrightarrow M^{**}$ is inj.

(b) M : reflexive ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $M \to M^{**}$ is bij.)

$\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \to M \to \ddot{F} \to \ddot{G}$

f.g. free R-modules

Thm 2.3. $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$: standard graded Noeth. normal domain with $\dim R \geq 2$.

R_0 : infinite field.

M : f.g. tor. free graded R-mod. of rank $r > 0$.

とする.

このとき, $^{\forall} k \geq$ "Mの次数付生成系のdegreeの中で最大のもの" に対して,

$^{\exists} I$: graded ideal of R, $^{\exists} m \in \mathbb{Z}$

s.t. $0 \to R(-k)^{r-1} \to M \to I(m) \to 0$

§3. Characterization of Bourbaki seq.

Thm 3.1 M : f.g. ref. R-mod. of rank $r>0$ とする.

$$0 \to M \xrightarrow{i} \underset{\text{f.g. free}}{F} \to \underset{\text{tor. free}}{X} \to 0$$ を1つ fix する.

このとき, R-linear $\varphi : R^{r-1} \to M$ に対して, 次が同値.

(a) $0 \to R^{r-1} \xrightarrow{\varphi} M \to \operatorname{Coker}\varphi \to 0$

provides a Bourbaki seq.

(b) $\operatorname{ht}_R\left(I_{r-1}(i\circ\varphi)\right) \geq 2$.

更に, R が UFD なら, (b) は次と同値:

(b') $\gcd\left(I_{r-1}(i\circ\varphi)\right) = 1$.

Ex 3.2. $R = k[x, y, z]$: poly. とする.

$$0 \to R(-3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}} R(-2)^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}} R(-1)^3 \to R \to 0$$

: Koszul cpx of x, y, z を考える.

$$Z_2 := \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & -z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

Z_2 は f.g. ref. graded R-mod. of rank 2. である.

このとき, $\varphi_{(c_1, c_2, c_3)} : R(-2) \to Z_2 = \langle \overline{e_2 \wedge e_3}, \overline{e_1 \wedge e_3}, \overline{e_1 \wedge e_2} \rangle.$

$$1 \longmapsto c_1 \overline{e_2 \wedge e_3} + c_2 \overline{e_1 \wedge e_3} + c_3 \overline{e_1 \wedge e_3}$$

$(c_1, c_2, c_3 \in k)$ とおくと.

$$0 \to R(-2) \xrightarrow{\varphi_{(c_1, c_2, c_3)}} Z_2 \to \mathrm{Coker}\, \varphi_{(c_1, c_2, c_3)} \to 0$$

: Bour. seq.

$\Longleftrightarrow \quad (c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0).$

Ex 3.2 は、次のように定式化できる。

- $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$: graded CM normal domain
  s.t. $R_0 = k$: alg. closed field
- M : f.g. ref. graded R-mod. of rank $r > 0$
- $k \geq$ "Mの次数付生成系のdegreeの中で最大のもの" とする。

更に、$R \cancel{\oplus} M$ と仮定する。

このとき、任意の R-linear $\varphi : R(-k)^{r-1} \longrightarrow M$ から、

$$
\begin{tikzcd}
 & R(-k)^{\alpha} =: G \arrow[d, two heads, "\pi : \text{a covering map}"] \\
 & M_{\geq k} \arrow[d, hook, "i : \text{the inclusion map}"] \\
F := R(-k)^{r-1} \arrow[r] \arrow[ruu, red, "\exists \varphi_\lambda"] & M
\end{tikzcd}
$$

が得られる。

すなわち、π と F, G の基底を固定することで、φ から、K 上の $\alpha \times (r-1)$ 行列 φ_λ が1つ得られる。
逆に K 上の $\alpha \times (r-1)$ 行列 φ_λ を与えれば、
R-linear $F \xrightarrow{i \circ \pi \circ \varphi_\lambda} M$ が与えられる。

以上の設定と注意のもとで、次が成り立つ:

Thm 3.3.

$$\left\{ \lambda \in K^{\alpha \times (r-1)} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \to F \xrightarrow{i \cdot \pi \cdot \varphi_\lambda} M \to \mathrm{Coker}(i \cdot \pi \cdot \varphi_\lambda) \to 0 \\ \text{is a Bourbaki seq.} \end{array} \right\}$$

は、$K^{\alpha \times (r-1)}$ の空でない開集合である。

Remark.

- Thm3.1は、M : ref. の場合の判定法であるが、論文内では、$\mathrm{pd}_R M < \infty$ の場合にも類似の判定法を与えている。
- 論文では更に、$0 \to R^{r-1} \to M \to I \to 0$ が Bourbaki seq. のとき、M のpresentation
  $$F_1 \to F_0 \to M \to 0 \quad (\mathrm{ex})$$
  から Bourbaki ideal I を求める方法も与えている。

§ 4. Bourbaki ideals of Koszul cycles.

$S = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$: polynomial ring over a field K とする.

(注: K は infinite でなくともよい.)

$$0 \to K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} K_1 \xrightarrow{\partial_1} K_0 \to 0$$

を Koszul cpx of $x_1, \cdots, x_n$ とする.

$1 \leq i \leq n$ に対して, $Z_i := \operatorname{Im} \partial_i$ とおく.

<u>Question</u>:
What is a Bourbaki seq. (ideal) of Z_i ?

$Z_1 \simeq \mathfrak{m}$, $Z_{n-1} \simeq R(-n)$ なので, $2 \leq i \leq n-1$ としてよい.

このとき, 次が正しい.

Prop 4.1

(a) For $1 \le {}^{\forall} i < {}^{\forall} j \le n$, (x_i, x_j) is a Bour. ideal of Z_{n-1}.

特に, Bourbaki ideal は unique でない

(b) $\left(\dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{x_i x_j} \;\middle|\; (i, j) \in \{(1,2), (2,3), \cdots, (n-1, n), (n, 1)\} \right)$

is a Bour. ideal of Z_{n-2}.

Prop 4.1 の鍵は $\exists$ multigraded Bourbaki seq. of Z_{n-1} and Z_{n-2}.

という事実による。この一司で次が成り立つ:

Thm 4.2.

(a) $i \ge 3$ とすると,

$\nexists$ multigraded Bourbaki seq. of Z_{n-i} for $n \gg 0$.

(b) $i \ge 2$ とすると,

$\nexists$ multigraded Bourbaki seq. of Z_i for $n \gg 0$.

Prop 4.3. A Bourbaki ideal of Z_2 is

$$\frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2} x_i^{n-1-i}} \cdot I_{\binom{n}{2}-(n-2)}\Big(\underbrace{C}_{\text{ちょっと複雑な行列}}\Big)$$

特に $n=5$ のとき，これは．

$$\frac{1}{x_2^2 x_3} I_6 \begin{pmatrix} x_1+x_3 & x_4 & x_5 & x_2+x_4 & x_5 & x_3+x_5 \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_4 \end{pmatrix}$$

で，これは monomial ではない。