ベクトル束の分裂、Cohen-Macaulay 性、Buchsbaum 性

宮崎　誓（熊本大学）

東京可換環論セミナー 2020

Zoom Meeting, 5 月 25 日

Outline

Horrocks 判定法

Notation

k : 代数閉体
$S = k[x, \cdots, x_n]$: k 上の多項式環
$\mathfrak{m} = S_+ = (x_0, \cdots, x_n)$
$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, S$

Remark

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、S 上の有限生成次数 S 加群 M, $\mathrm{depth}\, M \geq 1$ で、$\mathcal{E} \cong \tilde{M}$ を満たすものをとる。

Definition

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \tilde{M}$ が

$$\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}) = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(\ell)) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

を満たすとき、ACM 束 (arithmetically Cohen-Macaulay) という。

Horrocks 判定法、Auslander-Buchsbaum の定理

Theorem (Horrocks 1964)

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が ACM 束であれば、$\mathcal{E}$ は直線束の直和に同型になる。つまり、$\mathcal{E} \cong \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$ となる。

Remark

Horrocks の定理にはいくつかの証明法がある。

- Horrocks のオリジナルな証明
- 次元に関する帰納法 (cf. Okonek-Schneider-Spindler の本)
- Castelnuovo-Mumford regularity を用いた証明
- Auslander-Buchsbaum の定理 (cf. Matsumura の本)

Theorem (Auslander-Buchsbaum 1958)

ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m}, k$ 上の有限生成加群 M が $\operatorname{proj\,dim} M < \infty$ であれば、 $\operatorname{depth} M + \operatorname{proj\,dim} M = \operatorname{depth} R$ が成り立つ。

Horrocks 判定法、Auslander-Buchsbaum の定理

Sketch of Proof

$h = \operatorname{proj\,dim} M$ についての帰納法で示す。

$h = 0$ のときは、M が自由加群であり、自明。

$h = 1$ のときは、極小自由分解 $0 \to A^\ell \to A^m \to M \to 0$ を用いると、完全列 $0 \to \operatorname{Ext}^i_A(k, A)^\ell \to \operatorname{Ext}^i_A(k, M) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(k, A)^\ell \to 0$ を得る。

ゆえに、$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A - 1$ となる。

$h \geq 2$ のとき、完全列 $0 \to N \to A^m \to M \to 0$ を取ると、$\operatorname{depth} N = h - 1$ である。

また、完全列 $\operatorname{Ext}^i_A(k, A)^m \to \operatorname{Ext}^i_A(k, M) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(k, N) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(k, A)^m$ によって、$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} N - 1$ を得る。

Remark (Auslander-Buchsbaum から Horrocks へ)

S 上の有限生成加群 M は Hilbert のシジジー定理より $\operatorname{proj\,dim} M < \infty$ となるので、Auslander-Buchsbaum の定理 (Graded Version) が適用される。

Horrocks 判定法の良く知られている証明

Sketch of Proof (Okonek-Schneider-Spindler の証明)

$\mathbb{P}^n$ 上の ACM ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して n についての帰納法で示す。

$n=1$ のときは、Grothendieck の定理。
$n \geq 2$ のときは、超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ に対して、$\mathcal{E}|_H \cong \oplus \mathcal{O}_H(\ell_i)$ となる。
$\mathcal{F} = \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell_i)$ とおく。

ACM の仮定より、完全列

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}|_H) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_H, \mathcal{E}|_H) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{E}(-1)) = 0$$

が得られるので、写像 $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ を得る。
ところで、$\det\Phi : \det\mathcal{F} \to \det\mathcal{E}$ は零点を持たないので、同型となる。

Castelnuovo-Mumford 正則量

Definition (Mumford)

$\mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が m-regular であるとは、$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$, $i \geq 1$ のときに言う。

Proposition

$\mathcal{F}$ が m-regular のとき、次が成り立つ。

(1) $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(j)) = 0$, $i \geq 1$, $i + j \geq m$

(2) $\mathcal{F}(m)$ が大域生成である。すなわち、全射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus} \to \mathcal{F}$ が存在する。

Definition

$\operatorname{reg} \mathcal{F} := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{F} \text{ is } m\text{-regular}\}$

Horrocks 判定法と Castelnuovo-Mumford 正則量

Proof (Castelnuovo-Mumford 正則量を用いた証明)

$\mathbb{P}^n$ 上の ACM 束 $\mathcal{E}$ に対して、$\operatorname{reg}\mathcal{E} = m$ とおく。

$\mathcal{E}(m)$ は大域生成なので $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus} \to \mathcal{E}(m)$ を得る。

$\mathcal{E}$ は $(m-1)$-regular でなく、ACM 束なので、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(m-n-1)) \neq 0$ となる。

Serre の双対性を用いると、$\mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee(-m)) \neq 0$ であり、非零射 $\psi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ を得る。

すると、合成写像 $\psi \circ \varphi$ は零写像ではないので、分裂する。

したがって、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$ を直和因子に持つ。この操作を繰り返す。

Horrocks の証明 — Walter, Malaspina-Rao

Sketch of Proof (Walter, Malaspina-Rao)

$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S = \operatorname{Proj} k[x_0, \cdots, x_n]$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、$E = \Gamma_* \mathcal{E}$ とおく。

$S^\vee$-加群 $E^\vee$ を考える。次数付けは負の方向であるが、$E^\vee$ は有限生成であり、射影次元有限である。

$E^{\vee\vee\vee} = E^\vee$ であるから、$\operatorname{depth} E^\vee \geq 2$ となる。Auslander-Buchsbaum の定理より、完全列

$$0 \to P^{n-1\vee} \to \cdots \to P^{0\vee} \to E^\vee \to 0$$

がとれる。ここで、$P^{i\vee}$ は次数自由 S 加群の双対である。

双対をとると次数付き S 加群の複体

$$0 \to E \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$$

が得られる。

したがって、$\mathbb{P}^n$ 上の層としての次の完全列を得る。

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{P}^0 \to \cdots \to \mathcal{P}^{n-1} \to 0$$

Horrocks の証明 — Walter, Malaspina-Rao

Sketch of Proof (Walter, Malaspina-Rao)

複体 $P^\bullet : 0 \to P^0 \to \cdots P^{n-1} \to 0$ 対して、$\mathrm{H}^i_*(\mathcal{E}) \cong \mathrm{H}^i(P^\bullet)$, $1 \le i \le n-1$ となる。正確に言うと、次が成り立つ。

$$\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*\mathcal{E} \cong P^\bullet$$

ところで、$0 \to E \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$ は極小にとることができ、E の極小自由分解を $0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^{-1} \to E \to 0$ とすると、これらをつないで複体

$$P^\bullet : 0 \to P^{-n} \to \cdots \to P^0 \to \cdots \to P^{n-1} \to 0$$

が得られる。

このとき、$\mathrm{H}^i(P^\bullet)$ は長さ有限の S 加群であり、特に $\mathrm{H}^i(P^\bullet) = 0$, $i \notin \{1, \cdots, n-1\}$ である。ただし、ここで得られた $P^\bullet$ は極小とは限らないので、若干の注意が必要である。(極小の複体をつないでも極小とは限らない。)

これまでの議論をまとめると、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して、次数付き S 加群の有界な複体のなす導来圏 $D^\flat(\mathrm{S}-\mathbf{Mod})$ “the derived category of bounded complexes of graded free S-modules” の対象 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})$ への対応が定まることになる。

Horrocks の証明 — Walter, Malaspina-Rao

Sketch of Proof (Walter, Malaspina-Rao)

さらに、$P^\bullet$ から、自由加群 $\cdots \to \cdots \to 0 \to L^{-1} \to 0 \to \cdots$ を取り出して、極小な複体 $P^\bullet_{\min}$ をつくると、次が成り立つ。

$$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) \cong P^\bullet_{\min}$$

Notation

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束の安定同値 "stable equivalence" なカテゴリーを $\underline{\mathbb{VB}}$ とおく。ここで、$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ に対して、ある直線束の直和 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ があり、$\mathcal{E} \oplus \mathcal{L} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{M}$ を満たすとき、安定同値という。

また、$C^\bullet \in Ob(D^\flat(\mathrm{S{-}}\mathbf{Mod}))$ が $\mathrm{H}^i(C^\bullet)$ がすべて S 上有限加群であり、$\mathrm{H}^i(C^\bullet) = 0$, $0 < i < n$ となる充満部分圏を **FinL** と書くことにする。

Horrocks の証明 — Walter, Malaspina-Rao

Theorem (Horrocks, Walter, Malaspina-Rao)

関手 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_* : \underline{\mathbb{VB}} \to \mathbf{FinL}$ はカテゴリーの同値を与える。逆関手は $\mathrm{Syz} : \mathbf{FinL} \to \underline{\mathbb{VB}}$ となる。

Proof (Horrocks の定理の証明)

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の中間次元のコホモロジーが消滅することは、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) = 0$ ということであるので、カテゴリーの同値から、$\mathcal{E}$ が直線束の直和であることが言える。

Remark

Malaspina-Rao(ANT, 2015) はこの手法を ACM 多様体上の ACM 束の構造定理に応用している。
(Cohen-Macaulay 環上の Cohen-Macaulay 加群)

Buchsbaum 性

Definition and Proposition

多項式環 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 M が Buchsbaum 加群であるとは次の同値条件が成り立つときにいう。$\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$, $\dim M = d$ とする。

(i) 任意の同次巴系 $y_1, \cdots, y_d$, 巴系イデアル $\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$ に対して、$\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ が巴系の取り方によらない。

(ii) 任意の同次巴系 $y_1, \cdots, y_d$, $0 \le i \le d$ に対して、$\mathfrak{m}\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M/(y_1, \cdots, y_i)M) = 0, \quad 0 \le j \le d - i - 1$ が成り立つ。

(iii) $\tau_{<d}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は $D^\flat(\mathrm{S{-}\mathbf{Mod}})$ において、k-線形空間の複体と同型になる。

Definition

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が任意の r 平面 $L(\subseteq \mathbb{P}^n)$, $r = 1, \cdots, n$ に対して

$$(x_0, \ldots, x_n)\mathrm{H}^i_*(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}|_L) = 0, \quad 1 \le i \le r - 1$$

を満たすとき、Buchsbaum 束という。

Chang-Goto の定理

Theorem (Chang(1990), Goto(1987))

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbuam 束であれば、$\mathcal{E}$ は微分形式の層の直和に同型になる。つまり、$\mathcal{E} \cong \oplus \Omega_{\mathbb{P}^n}^{k_i}(\ell_i)$ となる。

Sketch of Proof (Yoshino)

$\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, S$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が Buchsbaum であれば、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})(\cong \tau_{<n+1}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$ は k 線形空間の複体になる。ここで、 $M = \Gamma_*(\mathcal{E})$ を次数 S 加群とする。

$\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}$ は中間次元のコホモロジーは $\mathrm{H}^p(\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ のみであるから、$\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n})$ は k 線形空間の複体となる。

カテゴリーの同値から、$\mathcal{E}$ が直線束の直和因子を除いて、$\wedge^p\Omega_{\mathbb{P}^n}(\ell)$ の直和に同型であることがわかる。

Question

$\mathbb{P}^3$ 上の Null-Correlation 束や $\mathbb{P}^4$ 上の Horrocks-Mumford 束の判定法はあるか。
(rank $= 2$, quasi-Buchsbaum, not Buchsbaum)

Malaspina-Miyazaki の方法

Proposition

$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が $\mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \neq 0$, $1 \leq p \leq n-1$ を満たすとする。次の条件が成り立てば、$\mathcal{E}$ は $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}$ を直和因子として持つ。

(a) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i+1)) = 0$ for $1 \leq i \leq p$.

(b) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(p-i-1)) = 0$ for $p \leq i \leq n-1$,

Proof

(a) を用いると、Koszul 複体

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(p) \to \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0,$$

より、全射 $\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$ が得られる。

(b) を用いると、Koszul 複体

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-n) \to \cdots \to \mathcal{O}^{\oplus}_{\mathbb{P}^n}(-p-1) \to \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \to 0,$$

より、全射 $\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^p_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ が得られる。.

Malaspina-Miyazaki の方法

Proof

次の元をとる。

- ${}^{\exists}f \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p\vee})$ such that $\varphi(f) = s(\neq 0) \in \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$.
- ${}^{\exists}s^* \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$ corresponding to $s \in \mathrm{H}^m(\mathcal{E})$.
- ${}^{\exists}g \in \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p})$ such that $\psi(g) = s^*(\neq 0) \in \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$.

ここで of $f \in \mathrm{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}^n}^p, \mathcal{E})$ and $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p)$ とみなし、次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
f \otimes g & \in & \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p\vee}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p}) & \to & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
s \otimes s^* & \in & \mathrm{H}^p(\mathcal{E}) \otimes \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1)) & \to & \mathrm{H}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)),
\end{array}$$

すると、自然な写像 $\mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p\vee}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ は同型 $g \circ f$ を与える。

したがって、$\mathcal{E}$. は $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p$ を直和因子として持つ。

Chang-Goto の構造定理のシジジーの手法による別証明

Sketch of Proof

多項式環 $S = k[x_0, \cdots, x_n]$ 上の次数加群 $E = \Gamma_*(\mathcal{E})$ は $\dim E = n+1$, $\mathrm{depth}\, E \geq 2$ である。ここで、Koszul 複体 $K_\bullet = K_\bullet((x_0, \cdots, x_n); S)$ と次数加群 E の極小入射分解 $I^\bullet$ をとる。

2 重複体 $C^{\bullet\bullet} = \mathrm{Hom}_R(K_\bullet, I^\bullet)$ からフィルター付けを考え、スペクトル系列 $\{\mathrm{E}_r^{p,q}\}$ を構成する。

このとき、次のスペクトル系列が得られる。

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}_p((x_0, \cdots, x_n); \mathrm{H}_*^q(\mathcal{E})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q} = \mathrm{H}^{p+q}((x_0, \cdots, x_n); E)$$

Buchsbaum 環の理論より、自然な写像

$$\mathrm{H}^q = \mathrm{H}^q((y_0, \cdots, y_d); E) \to \mathrm{E}_1^{0,q} = \mathrm{H}_\mathfrak{m}^q(E), \quad 0 \leq q \leq n$$

は全射である。さらに、$d_r^{p,q} : \mathrm{E}_r^{p,q} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$ は $q \leq n$, $r \geq 1$ のとき零写像となる。

Chang-Goto の構造定理のシジジーの手法による別証明

Sketch of Proof

Malaspina-Miyazaki の方法を念頭におきながら、上記のスペクトル系列の類似をつくる。

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\oplus}(1) \to \cdots \to \mathcal{E}^{\oplus}(p) \to \mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

は完全列である。そこで、$M^\bullet = (K^\bullet)_{\leq p} : 0 \to S \to S(1)^{\oplus} \to \cdots S(p)^{\oplus} \to 0$ および E の極小入射分解 $I^\bullet$ に対して、2 重複体 $C^{\bullet\bullet} = M^\bullet \otimes I^\bullet$ を取る。

フィルター付けからスペクトル系列 $\{\mathrm{E}_r^{p,q}\}$ を構成すると次のようになる。

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^q_*(\mathcal{E}), \quad \mathrm{H}^{p+q} = \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p}_{\mathbb{P}^n}{}^{\vee})$$

ここで、$d_r^{p,q} : \mathrm{E}_r^{p,q} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$ は $q \leq n$, $r \geq 1$ のとき零写像となるから、全射

(i) $\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E} \otimes \Omega^{p\vee}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^p(\mathcal{E})$

(ii) $\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \Omega^{p}_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{H}^{n-p}(\mathcal{E}^\vee(-n-1))$

を得る。

Malaspina-Miyazaki の方法に従って Chang-Goto の定理は証明される。

多重射影空間上の Castelnuovo-Mumford regularity

Definition

$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が次を満たすとき、$\mathcal{F}$ が 0-regular であると言う。

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}(j_1, j_2)) = 0, \quad i \geq 1,\ j_1 + j_2 = -i,\ -m \leq j_1 \leq 0,\ -n \leq j_2 \leq 0$$

$\mathcal{F}$ が (m_1, m_2)-regular とは $\mathcal{F}(m_1, m_2)$ が 0-regular のときにいう。

Proposition

$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ が 0-regular であるとする。

(1) $\mathbb{P}^m$ の一般の位置にある超平面 $H \subset \mathbb{P}^m$ に対して、$\mathcal{F}|_{H \times \mathbb{P}^n}$ は $H \times \mathbb{P}^n (\cong \mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^n)$ において 0-regular である。

(2) 任意の $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$ に対して $\mathcal{F}(m_1, m_2)$ は 0-regular である。

(3) $\mathcal{F}$ は大域生成である。

多重射影空間上の Castelnuovo-Mumford regularity

Remark

$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ で任意の $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(\ell_1, \ell_2)) = 0$, $1 \leq i \leq m+n-1$ を満たすものは存在しない。

Proof

$\mathcal{E}(t,t)$ が 0-regular となる最小の t をとり、$\mathcal{F} = \mathcal{E}(t,t)$ とおく。

条件を満たすとすれば、$\mathrm{H}^{m+n}(X, \mathcal{F}(-m-1, -n-1)) \neq 0$ となり、Serre 双対性を用いると、$\mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee) \neq 0$ となり、零でない写像 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{O}_X$ が得られる。
一方、$\mathcal{F}$ は大域生成であるから、全射 $\psi : \mathcal{O}^\oplus \to \mathcal{F}$ を得る。

$\varphi \circ \psi$ は零でない写像であるので、$\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{F}$ の直和因子になることがわかる。ところが、$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{O}_X(-m-1, 0)) \neq 0$ であるから、$\mathcal{E}$ の仮定に矛盾することになる。

多重射影空間でのベクトル束の分裂判定法

Theorem

$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ について、任意の $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$, $i \neq 0, m, n, m+n$ が成立しているとする。ある整数 $c \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c \leq |m-n|$ が存在して、任意の整数 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ に対して、次が成り立つとする。

(1) $\ell_2 \leq \ell_1 + c$ のとき $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$

(2) $\ell_2 \geq \ell_1 - |m-n| + c$ のとき $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$

すると、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X(-1, 0), \cdots, \mathcal{O}_X(-m, 0)$, $\mathcal{O}_X(0, -1), \cdots, \mathcal{O}_X(0, -n)$ を $\mathcal{O}_X(t, t)$ で振ったベクトル束の直和になる。

Remark

$m = n = 1$ の場合は、$\mathbb{P}^3$ の 2 次超曲面 $Q(\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ の ACM 束が $\mathcal{O}_Q$, $\mathcal{O}_Q(-1, 0)$, $\mathcal{O}_Q(0, -1)$ の振れの直和に同型になる、ということである。

一般の 2 次超曲面の場合は Knörrer の結果により、構造層もしくはスピノル束の振れの直和に同型になることがわかる。

多重射影空間でのベクトル束の分裂判定法

Sketch of Proof

任意の $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $-m \le \ell_1 \le 0$, $-n \le \ell_2 \le 0$ と任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}(\ell_1 + t, \ell_2 + t)) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}(\ell_1 + t, \ell_2 + t)) = 0$ とする。

この場合は、$\mathcal{E}(t, t)$ が 0-regular となる最小の t を取り $\mathrm{H}^{m+n}(X, \mathcal{E}(-m-1+t, -n-1+t)) \neq 0$ とすると、これまでと同じ議論により、$\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{E}(t, t)$ の直和因子になる。

上記の範囲で $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ または $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ となる (j_1, j_2) が存在する場合を考えればよい。

$\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((j_1, j_2)) \neq 0$ で $\ell_2 - \ell_1 < j_2 - j_1$ を満たす ℓ_1, ℓ_2 に対して $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{E}((\ell_1, \ell_2)) = 0$ を満たす $(j_1, j_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を取る。

ここで、$\mathcal{F} = \mathcal{E}(j_1, j_2)$ とおく。$j_2 - j_1 \ge c + 1$ に注意する。

$\mathrm{H}^m(\mathcal{F}(1, 0)) = \mathrm{H}^{m-1}(\mathcal{F}(2, 0)) = \cdots = \mathrm{H}^1(\mathcal{F}(n, 0)) = 0$ となる。ここで、注意するのが、$n < m$ のとき、$\mathrm{H}^n(\mathcal{F}(m - n + 1, 0) = 0$ となることである。

実際、$j_2 - j_1 - (m - n + 1) \ge c + 1 - |m - n| - 1 = c - |m - n|$ の範囲では、$\mathrm{H}^n(\mathcal{E}(j_1 + m - n + 1, j_2)) = 0$ である。

多重射影空間でのベクトル束の分裂判定法

Sketch of Proof

Koszul 複体からできる完全列

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1,0)^{\oplus} \to \cdots \to \mathcal{F}(m,0)^{\oplus} \to \mathcal{F}(m+1,0) \to 0$$

を用いると、全射 $\varphi : \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0)) \to \mathrm{H}^m(\mathcal{F})$ を得る。

また、全射 $\psi : \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-m-1,0)) \to \mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1))$ を得る。

これまでの議論と同様に、

$$f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-m-1,0),\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0)),$$
$$g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X(-m-1,0)) \cong \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-n-1,0))$$

に可換図式を用いると

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(m+1,0)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(-m-1,0)) & \to & \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^m(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^n(\mathcal{F}^\vee(-m-1,-n-1)) & \to & \mathrm{H}^{m+n}(\mathcal{O}_X(-m-1,-n-1)), \end{array}$$

を用いると、$g \circ f$ は同型になり、写像 f により、$\mathcal{O}_X(-m-1,0)$ は $\mathcal{F}$ の直和因子となる。

多重射影空間でのベクトル束の分裂判定法

Sketch of Proof

したがって、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X(-j_1 - m - 1, -j_2)$ を直和因子として持つ。
$1 \le j_2 - j_1 \le m$ であるので $-j_2 - (-j_1 - m - 1) = 1, \cdots, m$ を取りうる。
ゆえに $\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X(-1 + t, t), \cdots, \mathcal{O}_X(-m + t, t)$ 型の直線束を直和因子として取る。

Theorem (Malaspina-Miyazaki)

$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が整数 $1 \le p \le m - 1$, $1 \le q \le n - 1$ に対して $\mathrm{H}^{p+q}(\mathcal{E}) \neq 0$ を満たすとする。さらに、次の条件を満たせば. $\mathcal{E}$ は $\Omega^p_{\mathbb{P}^m} \boxtimes \Omega^q_{\mathbb{P}^n}$ を直和因子として持つ。

(a) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(a, b)) = 0$ for $1 \le i \le p + q$, $0 \le a \le p$, $0 \le b \le q$ with $i + a + b = p + q + 1$.

(b) $\mathrm{H}^i(\mathcal{E}(a, b)) = 0$ for $p + q \le i \le m + n - 1$, $p - m \le a \le 0$, $q - n \le b \le 0$ with $i + a + b = p + q - 1$,

Question

$X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が $\Omega^p_{\mathbb{P}^m}(s) \boxtimes \Omega^q_{\mathbb{P}^n}(t)$ の直和に同型になるための必要十分条件は何か。

多重射影空間におけるいくつかの結果

Proposition

$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上の既約なベクトル束 $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとする。

(1) $\mathrm{H}^2(\mathcal{E}) \neq 0$

(2) $\mathrm{H}^1(\mathcal{E}(1,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(0,1)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(1,0)) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(-1,0)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{E}(0,-1)) = \mathrm{H}^3(\mathcal{E}(-1,-1)) = 0$

このとき、$\mathcal{E} \cong \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}$ となる。

Proposition

$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(\ell)$ に対して、次が成り立つ。

(1) $\mathcal{E}$ が ACM 束である。$\Leftrightarrow \ell = 1, -1$

(2) $\mathcal{E}$ が Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -3 \leq \ell \leq 3$

(3) $\mathcal{E}$ が quasi-Buchsbaum 束である。$\Leftrightarrow -4 \leq \ell \leq 4$

References

- 宮崎　誓, On Horrocks-type Criteria for Vector Bundles, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺」, 高知大学 (2019 年 11 月)
- M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68(1958), 625–657.
- E. Ballico and F. Malaspina, Regularity and cohomological splitting conditions for vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 345 (2011), 137 – 149.
- M. C. Chang, Characterization of arithmetically Buchsbaum subschemes of codimension 2 in $\mathbb{P}^n$, J. Differential Geom. 31 (1990), 323–341.
- L. Costa and R. M. Miró-Roig, Cohomological characterization of vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 294 (2005), 73–96.
- S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, ASPM 11(1987), 39–64.
- G. Horrocks, Vector bundles on the punctual spectrum of a ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689 – 713.
- H. Knörrer, Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I, Invent. Math. 88(1987), 153 – 164.

References

- F. Malaspina and C. Miyazaki, Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces, Ric. mat. 67(2018), 963–968.
- F. Malaspina and A. P. Rao, Horrocks correspondence on arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Algebra Number Theory 9(2015), 981–1003.
- C. Miyazaki, Graded Buchsbaum algebras and Segre products, Tokyo J. Math. 12(1989), 1–20.
- C. Miyazaki, A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1435–1440.
- C. Miyazaki, Buchsbaum criterion of Segre products of vector bundles on multiprojective space, J. Algebra 467 (2016), 47–57.
- C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3 Birkhäuser, 1980.
- C. H. Walter, Pfaffian subschemes, J. Algebraic Geom. 5(1996), 671–704.
- Y. Yoshino, Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension, J. Algebra 159(1993), 240–264.