On jet schemes after Mustaţǎ

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 2 年
高木 俊輔 (Shunsuke Takagi) [1]

はじめに

この小文では，ジェットスキームによる特異点（有理特異点，ログ端末特異点，ログ標準特異点）の特徴付けに関する Mustaţǎ の論文 “Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities” 及び “Singularities of pairs via jet schemes” の内容を解説することを試みる．証明などは原論文を当たって頂きたい．ジェットスキームについてより詳しく知りたい方は，Blickle のサイト

`http://www.mabli.org/jet-bibliography.html`

にジェットスキーム及びモチーフ積分関係の詳細な論文リストがあるので，そちらを参照することをお薦めする．

1. ジェットスキーム

弧空間の理論を用いた特異点の研究は（映画 “A Beautiful Mind” で話題になった）Nash [N] によって始められた．この節では，ジェットスキーム，弧空間の定義を復習する．k を代数的閉体とし，X を k 上有限型スキームとする．

定義 1.1. $m \geq 0$ を任意の整数とする．X の m-**ジェットスキーム** (m-jet scheme) X_m とは，任意の k-代数 A に対し

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A, X_m) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A[t]/(t^{m+1}), X)$$

を満たすスキームとして定義される．特に X_m の k 値点全体は $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k[t]/(t^{m+1}), X)$ に一致する．$x \in X$ に対し，$\gamma_x(\mathrm{Spec}\, k) = x$ となる環準同型 $\gamma_x : \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^{m+1}) \to X$ を x 上の m-**ジェット** (m-jet) と言う．

定義より明らかに X_0 は X 自身，X_1 は全接空間 TX になる．また $m \geq n$ に対して，自然な射影 $A[t]/(t^{m+1}) \twoheadrightarrow A[t]/(t^{n+1})$ によって，自然な射 $\phi^m_n : X_m \to X_n$ が誘導される．

[1]第 15 回可換環論セミナー報告集, ならまちセンター，2003 年 1 月 29 日 (水)

定義 1.2. X の**弧空間** (arc space) X_∞ とは,

$$X_\infty = \varprojlim_m X_m$$

で定義されるスキームである．特に X_∞ の k 値点全体は $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k[[t]], X)$ に一致する．$x \in X$ に対し，$\gamma_x(\mathrm{Spec}\, k) = x$ となる環準同型 $\gamma_x : \mathrm{Spec}\, k[[t]] \to X$ を x 上の**弧** (arc) と言う．

X_m は k 上有限型スキームだが，X_∞ は一般には k 上有限型にはならないことに注意する．また任意の自然数 m に対して，$\psi_m : X_\infty \to X_m$ を自然な射影とする．

注意 1.3. 私見だが，ジェットスキームや弧空間を考えるときは，そのスキーム構造よりも単に位相空間としての構造が問題になることが多いように思われる．

例 1.4. (1) $X = \mathbb{A}^d = \mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_d]$ とする．このとき（k 値点だけを考えると），

$$X_m = \{\gamma : k[x_1, \ldots, x_d] \to k[t]/(t^{m+1})\}$$

となる．このような γ は各 x_i の行き先 $\gamma(x_i) = \sum_{j=0}^m \gamma_i^{(j)} t^j$ で決まるし，逆に係数 $\gamma_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, n, j = 0, \ldots, m)$ を決めれば X_m の k 値点が定まる．従って X_m の座標 $x_i^{(j)}$ を $x_i^{(j)}(\gamma) = \gamma_i^{(j)}$ となるように選ぶと，

$$X_m \cong \mathrm{Spec}\, k[x_1^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_d^{(m)}] = \mathbb{A}^{d(m+1)}.$$

(2) $f \in k[x_1, \ldots, x_d]$, $X = V(f) \subset \mathbb{A}^d$ とする．このとき $X_m \hookrightarrow (\mathbb{A}^d)_m \cong \mathbb{A}^{d(m+1)}$. $\mathbb{A}^d$ 上の m-ジェット $\gamma : k[x_1, \ldots, x_d] \to k[t]/(t^{m+1})$ が X_m に含まれるためには

$$f(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_d)) = f(\sum_{j=0}^m \gamma_1^{(j)} t^j, \ldots, \sum_{j=0}^m \gamma_d^{(j)} t^j) = 0 \in k[t]/(t^{m+1})$$

となることが必要十分である．従って

$$f(\sum_{j=0}^m x_1^{(j)} t^j, \ldots, \sum_{j=0}^m x_d^{(j)} t^j) = g_0 + g_1 t + \cdots + g_m t^m \in k[t]/(t^{m+1})$$

と $g_1, \ldots, g_m \in k[x_1^{(0)}, \ldots, x_d^{(0)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_d^{(m)}]$ を定めると，

$$X_m \cong V(g_1, \ldots, g_m) \subset \mathbb{A}^{d(m+1)}.$$

上の例から分かることだが，悪い特異点は大きなジェットスキームを持つ．これをきちんと定式化したのが，定理 3.4, 定理 3.6 である．

注意 1.5. 上の例から分かるように，ジェットスキームは定義は平易だが，m が大きくなると実際に計算することは難しい．2 次元の超曲面特異点のジェットスキーム（の次元）を Macaulay2 で計算させてみたが，$m = 4$ くらいで計算が終わらなくなってしまった．例えば，トーリック多様体の場合に簡単な計算法は存在しないのだろうか？

2. モチーフ積分

非特異な多様体上のモチーフ積分は Kontsevich [K] によって構成され，様々な応用をもたらした．この節では（非特異な多様体上の）モチーフ積分の性質について概説する．モチーフ積分のより詳しい解説は [C] 及びその参考文献を当たって頂きたい．なおモチーフ積分の特異な多様体上への拡張は Denef, Loeser によってなされた．詳しくは彼らの論文 [DL] を参照のこと．

モチーフ積分は本来，多様体の Grothendieck 環に値を持つが，それでは評価し難い．そこでここではモチーフ積分の Hodge 実現を考える．つまり Hodge-Deligne 多項式を使って，Grothendieck 環から係数評価がし易い $\mathbb{Z}[[u^{-1},v^{-1}]][u,v]$ に値を送り，$\mathbb{Z}[[u^{-1},v^{-1}]][u,v]$ に値を持つ積分としてモチーフ積分を捉えるのである．

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された非特異代数多様体とする．このとき弧空間 X_∞ の部分集合からなる Boole 代数 $\mathcal{M}$ (すなわち $Z \in \mathcal{M}$ ならば $Z^c \in \mathcal{M}$, $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{M}$ ならば $\cup_{i=1}^n Z_i \in \mathcal{M}$) と有限加法測度 $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}[[u^{-1},v^{-1}]][u,v]$ が存在して，次を満たす．なお $\mathbb{Z}[[u^{-1},v^{-1}]][u,v]$ には降鎖列 $\{\oplus_{i+j\geq l}\mathbb{Z}u^{-i}v^{-j}\}_l$ によって位相を入れる．

(1) Cyl を $\{\psi_m^{-1}(C) \mid m \geq 0, C \subset X_m$ は構成可能集合$\}$ からなる Boole 代数としたとき，$\mathcal{M}$ は Cyl を部分代数として含む．さらに任意の $\psi_m^{-1}(C) \in Cyl$ に対し，
$$\mu(\psi_m^{-1}(C)) = E(C;u,v)(uv)^{-(m+1)d}.$$
ただし $E(C;u,v)$ とは C の Hodge-Deligne 多項式，つまり
$$E(C;u,v) = \sum_{1\leq p\leq q\leq \dim C}\sum_{k\geq 0}(-1)^k h^{p,q}(H_c^k(C;\mathbb{C}))u^p v^q,$$
$h^{p,q}(H_c^k(C;\mathbb{C}))$ は $H_c^k(C;\mathbb{C})$ の混合 Hodge 構造の (p,q) 成分の次元である．

(2) $T \subset X_\infty$ に対し，集合列 $\{W_r \in Cyl \mid T \subset W_r\}_{r=1,2,\ldots}$ が存在して $\lim_{r\to\infty}\mu(W_r) = 0$ を満たすとき，$T \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(T) = 0$.

注意 2.1. (1) Hodge-Deligne 多項式が出てきて戸惑っている方もおられると思うが，主定理の証明に必要となる $E(C;u,v)$ の性質は，次の事実だけである: $C \subset X_m$ が局所閉集合ならば，$E(C;u,v)$ の次数は $2\dim C$ に等しく，次数 $2\dim C$ の項は単項式
$$(C \text{ の最高次元の既約部分の個数}) \cdot (uv)^{\dim C}$$
のみからなる．

(2) モチーフ積分は Grothendieck 環に値を持つ積分としては正標数の多様体に対しても定義できるが，その場合は Hodge 実現を考えることが出来ない．従って，別の方法で素性の良い環に値を送ってやる必要がある．例えば，エタールコホモロジーの Betti 数を使って形式的冪級数環に値を送るとどうなるだろうか？

定義 2.2. $F : X_\infty \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を X_∞ 上の関数とする．

(1) F が**可測** (mesurable) であるとは，任意の $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対し $F^{-1}(s) \in \mathcal{M}$ でさらに $\mu(F^{-1}(\infty)) = 0$ を満たす．
(2) F が**積分可能** (integrable) であるとは，F は可測でかつ $\sum_{s\in\mathbb{N}} \mu(F^{-1}(s))(uv)^{-s}$ は $\mathbb{Z}[[u^{-1}, v^{-1}]][u, v]$ において収束する．$\sum_{s\in\mathbb{N}} \mu(F^{-1}(s))(uv)^{-s}$ を $\int_{X_\infty} e^{-F}$ と表す．

例 2.3. $Y \subsetneq X$ を閉部分スキームとし，$\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ を Y の定義イデアル層とする．$\gamma_x \in X_\infty$ を $x \in X$ 上の弧とすると，γ_x は局所環準同型 $\gamma_x^* : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}[[t]]$ と対応する．そこで Y に付随した関数 $F_Y : X_\infty \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $F_Y(\gamma_x) = \mathrm{ord}_t(\gamma_x^*(\mathcal{I}_{Y,x}))$ を定義する．ただし $\mathrm{ord}_t(0) = \infty$ とする．このとき任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して $F_Y^{-1}(s) = \psi_{s-1}^{-1}(Y_{s-1}) \setminus \psi_s^{-1}(Y_s)$, $F_Y^{-1}(\infty) = Y_\infty$ となる．これより簡単な議論 ([M1, Lemma 3.7]) を経て，F_Y が可測関数であることが分かる．

ジェットスキームと双有理幾何学に現れる特異点の関係を考える上で，次の定理は大変重要である．

定理 2.4 (**変数変換公式** [Ba, Theorem 6.27], [DL, Lemma 3.3])**.** $\pi : X' \to X$ を非特異多様体間の固有双有理射とし，相対標準因子 $K_{X'/X}$ を W とおく．π は弧空間の間の射 $\pi_\infty : X'_\infty \to X_\infty$ を誘導する．$F : X_\infty \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を X_∞ 上の可測関数とすると，次が成り立つ．

$$\int_{X_\infty} e^{-F} = \int_{X'_\infty} e^{-(F\circ\pi_\infty + F_W)}.$$

これは片方が存在すればもう一方も存在し，その場合両者は一致するという意味である．特に $Y \subsetneq X$ を閉部分スキームとしたとき，$F = F_Y$ であれば $F \circ \pi_\infty = F_{\pi^{-1}(Y)}$ なので，

$$\int_{X_\infty} e^{-F_Y} = \int_{X'_\infty} e^{-(F_{\pi^{-1}(Y)} + F_W)}.$$

また $\mathrm{Supp}\, Y$ が単純正規交差因子の場合は，組み合わせ論的に $\int_{X_\infty} e^{-F_Y}$ を計算することが出来る．

命題 2.5 ([C, Theorem 2.15])**.** $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$ を単純正規交差な台を持つ，X 上の有効因子とする．$J \subseteq \{1, \ldots, r\}$ に対して，

$$D_J^\circ = \cap_{i\in J} D_i \setminus \cup_{i\notin J} D_i$$

とおく．このとき，

$$\int_{X_\infty} e^{-F_D} = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,r\}} \sum_{\alpha_i \geq 1, i\in J} E(D_J^\circ; u, v)(uv-1)^{|J|}(uv)^{-\dim X - \sum_{i\in J} \alpha_i(a_i+1)}.$$

3. 主結果

主定理を述べる前に，特異点対の定義を復習しておこう．

定義 3.1. X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規代数多様体とし，$Y \subset X$ を閉部分スキームとする．$\pi : X' \to X$ を対 (X, Y) のログ特異点解消とする，つまり π は特異点解消，$\mathcal{I}_Y \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F)$ は可逆でかつ $\operatorname{Supp} F \cup \operatorname{Exc}(\pi)$ は正規交差因子になる．ただし $\operatorname{Exc}(\pi)$ は π の例外集合とする．任意の有理数 $q \geq 0$ に対し，

$$K_{X'/X} - qF = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$$

と表す．ただし任意の $i = 1, \ldots, r$ に対し E_i は X' 上の既約因子，a_i は有理数である．

(1) 任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して $a_i \geq -1$ が成り立つとき，対 (X, qY) は**ログ標準的**であると言う．
(2) 任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して $a_i > -1$ が成り立つとき，対 (X, qY) は**川又ログ端末的**であると言う．

特に対 $(X, 0)$ がログ標準的 (resp. 川又ログ端末的) であるとき，X は高々**ログ標準特異点** (resp. **ログ端末特異点**) しか持たないと言う．

注意 3.2. 上の定義は全てログ特異点解消 π のとり方に依らない．またログ端末特異点ならば有理特異点であり，X が Gorenstein のときに両者は一致することも注意しておく．

例 3.3. (1) $X = \mathbb{A}^d = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_d]$, $Y = V((x_1, \ldots, x_d))$ (つまり Y は原点 1 点からなる閉部分多様体）とする．このとき，原点を中心とする爆発 $f : X' \to X$ が，対 (X, Y) のログ特異点解消になっている．E を f の例外因子とすると，

$$K_{X'/X} - qE = (d - 1 - q)E$$

より，対 (X, qY) がログ標準的 (resp. 川又ログ端末的) であることと，$d \geq q$ (resp. $d > q$) は同値である．

(2) (cf. [Ho]) $X = \mathbb{A}^d = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_d]$，$\Delta = \operatorname{div}_X(x_1^{d_1} + \cdots + x_d^{d_n})$ とする．このとき，対 $(X, q\Delta)$ がログ標準的 (resp. 川又ログ端末的) であることと，$\min\{1, \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d_i}\} \geq q$ (resp. $\min\{1, \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d_i}\} > q$) は同値である．

定理 2.4, 命題 2.5 から次の定理が得られる．

定理 3.4 ([M2, Theorem 3.1])**.** X を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異代数多様体，$Y \subset X$ を閉部分スキームとする．さらに $q \geq 0$ を有理数とする．

(1) (X, qY) がログ標準的であることと，任意の自然数 m について $\dim Y_m \leq (m+1)(\dim X - q)$ が成り立つことは同値である．
(2) (X, qY) が川又ログ端末的であることと，任意の自然数 m について $\dim Y_m < (m+1)(\dim X - q)$ が成り立つことは同値である．

証明のアイディア. $Y \neq \emptyset$ と仮定してよい．$\pi : X' \to X$ を (X, Y) のログ特異点解消で $X \setminus Y$ 上同型になるものとする．$\pi^{-1}(Y) = \sum_{i=1}^{r} b_i E_i$, $W = K_{X'/X} = \sum_{i=1}^{r} c_i E_i$ とおく．任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して b_i, c_i は 1 以上の整数であることに注意する．変数変換公式 (定理 2.4) を π に適用すると，

$$\int_{X_\infty} e^{-F_Y} = \int_{X'_\infty} e^{-(F_{\pi^{-1}(Y)} + F_W)} \tag{3.1}$$

を得る．ここで $\pi^{-1}(Y) + W$ は単純正規交差な台を持つ有効因子なので，注意 2.1 及び命題 2.5 より，(積分 $\int_{X_\infty} e^{-F_Y}$ が存在すれば) $\int_{X'_\infty} e^{-(F_\pi^{-1}(Y) + F_W)} \in \mathbb{Z}[[u^{-1}, v^{-1}]][u, v]$ の係数（の一部）は b_i, c_i を用いて計算することができる．一方, 定義から $\int_{X_\infty} e^{-F_Y}$ は Y のジェットスキームの次元の情報を含んでいる．従って等式 (3.1) を介して，Y のジェットスキームの次元の情報と b_i, c_i に関する情報を関連付けることができる．これらの議論をより精密に行ったのが Mustaţă の証明である．より詳しく説明すれば，$C \in \mathbb{N}$ を任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して $C > |\dim X - \frac{c_i + 1}{b_i}|$ を満たす定数とし，関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(s+1) \geq f(s) + \dim Y_s + C(s+1)$$

となるものを一つ固定する．また $f(\infty) = \infty$ とする．$F := f \circ F_Y$ とおくと，関数 $F : X_\infty \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は可測になる．ここで変数変換公式 (定理 2.4) を適用すると，

$$\int_{X_\infty} e^{-F} = \int_{X'_\infty} e^{-(f \circ F_\pi^{-1}(Y) + F_W)} \tag{3.2}$$

を得る．(3.2) の両辺の係数比較を詳細に行うことにより，主張を得る． □

注意 3.5. 定理 3.4 は最近，Ein, Mustaţă, 安田等によって，X に特異点を許す場合（正確に言えば，X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規の場合）に拡張された．しかしながら，X が非特異な場合に比べて，記述はかなり煩雑になっている．また証明の方針が「係数比較」であることに変わりはない．詳細は [EMY], [Y] を参照して頂きたい．また Ein, Lazarsfeld, Mustaţă [ELM] は最近，定理 3.4 のモチーフ積分を使わない別証明を与えた．

X が局所完全交差な多様体の場合には，X のジェットスキームの既約性はそのジェットスキームの次元で特徴付けられる ([M1, Proposition 1.4])．これより定理 3.4 の証明と全く同様の論法によって，次の定理も得られる．

定理 3.6 ([M1, Theorem 3.3]). X を $\mathbb{C}$ 上定義された局所完全交差な代数多様体とする．このとき，X が高々ログ端末特異点しか持たないことと任意の $m \geq 0$ に対して m ジェットスキーム X_m が既約になることは同値である．

注意 3.7. Ein, Mustaţă [EM] は，特異点を許す多様体上のモチーフ積分を使って，ログ標準特異点の場合に上の定理の類似を得た．すなわち，X を局所完全交差な代数多様体としたとき，X が高々ログ標準特異点しか持たないことと任意の $m \geq 0$ に対して m ジェットスキーム X_m が純次元（全ての既約成分の次元が同じ）になることは同値である ([EM, Theorem 1.3]).

密着閉包 (tight closure) の理論を学ぶものとしては，自然と次の問題が頭に浮かぶ．

問題 3.8. 川又ログ端末対と強 F-正則対は，十分大きな標数 $p \gg 0$ への還元を通じて，対応している．では強 F-正則対，強 F-正則環の場合に定理 *3.4*, 定理 *3.6* の類似は成り立つだろうか？(どのように定式化されるべきだろうか？ *cf.* 注意 *2.1(2)*)

References

[Ba] Batyrev, V. V., *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities* in *Integrable systems and algebraic geometry* (*Kobe/Kyoto, 1997*), 1–32, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[Bl] Blickle, M., *Jet schemes and motivic integration*, preprint.

[C] Crow, A., *An introduction to motivic integration*, arXiv:math.AG/9911179.

[DL] Denef, J. and Loeser, F., *Germs of arcs on singular varieties and motivic integration*, Invent. math. **135** (1999), 201–232.

[ELM] Ein, L., Lazarsfeld, R. and Mustaţă, M., *Contact loci in arc spaces*, arXiv:math.AG/0303268, to appear in Compositio Math.

[EM] Ein, L. and Mustaţă, M., *Inversion of Adjunction for locally complete intersection varieties*, arXiv:math.AG/0301164, preprint.

[EMY] Ein, L., Mustaţă, M. and Yasuda, T., *Jet schemes, log discrepancies and Inversion of Adjunction*, arXiv:math.AG/0212211, to appear in Invent. Math.

[Ho] Howald, J.,*Multiplier ideals of sufficiently general polynomials*, arXiv:math.AG/0303203, preprint.

[K] Kontsevich, M., *Motivic Integration*, Lecture at Orsay (1995).

[M1] Mustaţă, M., *Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities*, Invent. Math. **145** (2001), 397–424.

[M2] ———, *Singularities of pairs via jet schemes*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 599–615.

[N] Nash, J. F., Jr., *Arc structure of singularities*, Duke Math. J. **81** (1995), 31–38.

[Y] Yasuda, T., *Dimensions of jet schemes of log singularities*, arXiv:math.AG/0201129, to appear in Amer. J. Math.

〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

E-mail address: stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp